



高校生のための
入門微積分物理学

<https://nakayama-senshu.com/>

【解説 1】位置、速度、加速度の関係（1次元の場合）	4
【問題 1】等速直線運動	5
【問題 2】等加速度運動	8
【問題 3】 n 次の整式で表される運動	11
【問題 4】等速直線運動（抵抗あり）	14
【問題 5】等加速度運動（抵抗あり）	18
【問題 6】単振動	23
【解説 2】位置、速度、加速度の関係（ n 次元の場合）	26
【問題 7】ベクトル関数の微分、積分（性質）	27
【 【問題 8】放物運動（2次元）	31
【問題 9】等速円運動	34
【解説 3】速度と速さ、変位と移動距離、軌跡と弧長	38
【問題 10】移動距離（1次元運動）	40
【問題 11】移動距離（放物運動）	41
【問題 12】移動距離（等速円運動）	42
【解説 4】物体系、質量、運動量	43
【問題 13】物体系の性質	46
【問題 14】質量関数、運動量関数の性質	48
【解説 5】質点位置と物体位置（重心）、平均運動量	51
【問題 15】平均の計算（連続分布の場合）	54
【問題 16】物体位置（重心）と体積密度	56
【問題 17】物体と物体の重心	58
【問題 18】物体位置（重心）の計算	60
【問題 19】物体位置（重心）の計算（具体例）	62
【解説 6】物体系の直和分割、 N 質点系	65
【問題 20】質点位置と物体位置の関係	66
【問題 21】 N 質点系の具体例	68
【解説 7】運動量、力、質量、ニュートンの運動方程式	71
【問題 22】慣性の法則（ニュートン力学の第 1 法則に基づく慣性運動）	75
【問題 23】ニュートン力学の第 2 法則（ニュートンの運動方程式）	76
【問題 24】作用・反作用の法則（ニュートン力学の第 3 法則）	77
【問題 25】運動量保存則	78
【解説 8】力積	79
【問題 26】力積の性質	80
【問題 27】力積の計算	82
【解説 9】運動エネルギーと仕事量	83

【問題 28】エネルギー、仕事量の計算（等加速度運動）	85
【問題 29】エネルギー、仕事量の計算（単振動）	86
【問題 30】エネルギー、仕事量の計算（斥力）	87
【問題 31】エネルギー、仕事量の計算（振り子）	88
【解説 10】力の速度方向成分と経路積分	91
【問題 32】線積分の計算（切断面の面積）	93
【問題 33】線積分の計算演習（標高、勾配ベクトル）	95
【問題 34】線積分の計算演習（振り子）	101
【問題 35】線積分の計算演習（万有引力）	103
【解説 11】ポテンシャル場、エネルギー	105
【問題 36】ポテンシャル場の具体例	108
【問題 37】ポテンシャル場の利用（ $\phi = -\frac{1}{xyz}$ ）	111
【問題 38】ポテンシャル場の利用（螺旋）	112
【解説 12】力学的エネルギー保存法則	115
【問題 39】力学的エネルギー保存法則とポテンシャル場	117
【解説 13】物体の衝突	118
【問題 40】衝突運動量と、相対入射速度、相対反射速度の関係	125
【問題 41】衝突と運動エネルギー、相対速度の関係	126
【問題 42】衝突と反発係数	128
【問題 43】衝突によるエネルギー損失	129
【問題 44】衝突と反発係数（1次元運動の場合）	130
【問題 45】床との衝突	134
【問題 46】衝突と反発係数（3次元運動の場合）	135
【解説 14】慣性系、非慣性系	139
【問題 47】ガリレイ変換（計算例）	145
【問題 48】等加速度運動する座標系（計算例）	147
【問題 49】等角速度で回転運動する座標系（計算例）	149
【解説 15】微分方程式の解法（その1 基本形）	154
【問題 50】微分方程式例題（その1 基本形）	155
【解説 16】微分方程式の解法（その2 線形常微分方程式）	159
【問題 51】微分方程式例題（その2 線形常微分方程式）	161
【解説 17】主要な運動方程式の解	173
【問題 52】運動方程式の解：等速直線運動	174
【問題 53】運動方程式の解：等加速度運動	175
【問題 54】運動方程式の解：等速直線運動（抵抗あり）	177
【問題 55】運動方程式の解：等加速度運動（抵抗あり）	179

【問題 56】運動方程式の解：単振動	182
【解説 18】運動方程式の極座標変換	184
【問題 57】運動方程式の極座標変換	186
【問題 58】運動方程式（極座標）の解：螺旋	190
【解説 19】天体軌道	192
【問題 59】天体軌道の算出	194
【問題 60】地球軌道の算出	197
【解説 20】1次元波動方程式	201
【問題 61】1次元波動方程式の解（例：1次元進行波）	205
【問題 62】重ね合わせの原理	207
【問題 63】1次元進行波の進行速度	208
【問題 64】1次元波動方程式のダランベールの解	209
【問題 65】ダランベールの解の初期値問題	210
【問題 66】1次元波動方程式のダランベールの解（例）	212
【解説 21】多次元波動方程式	213
【問題 67】多次元波動方程式の解（例 1：平面波）	216
【問題 68】多次元波動方程式の解（例 2：3次元球面波）	219
【問題 69】多次元波動方程式の解（例 3：2次元球面波）	222
【解説 22】定常波	226
【問題 70】定常波（原点が節の場合）	228
【問題 71】定常波（2点が節の場合）	230
【解説 23】波の反射	232
【問題 72】自由端反射	238
【問題 73】自由端・自由端反射	239
【問題 74】固定端・自由端反射	241
【問題 75】正弦波の場合の、定常波および反射	244

【解説 1】 位置、速度、加速度の関係 (1次元の場合)

無定義

「時間」、「時刻」という用語は定義せずに用いる。また物体が空間上のどこにあるのかを表す固有の物理量を「位置」という。一般には「位置」は時刻とともに変化する。

数学的定義

「位置」の時間変化率（時間微分）を「速度」、[▶Video](#)

「速度」の時間変化率（時間微分）を「加速度」、と呼ぶ。[▶Video](#)

数学定理

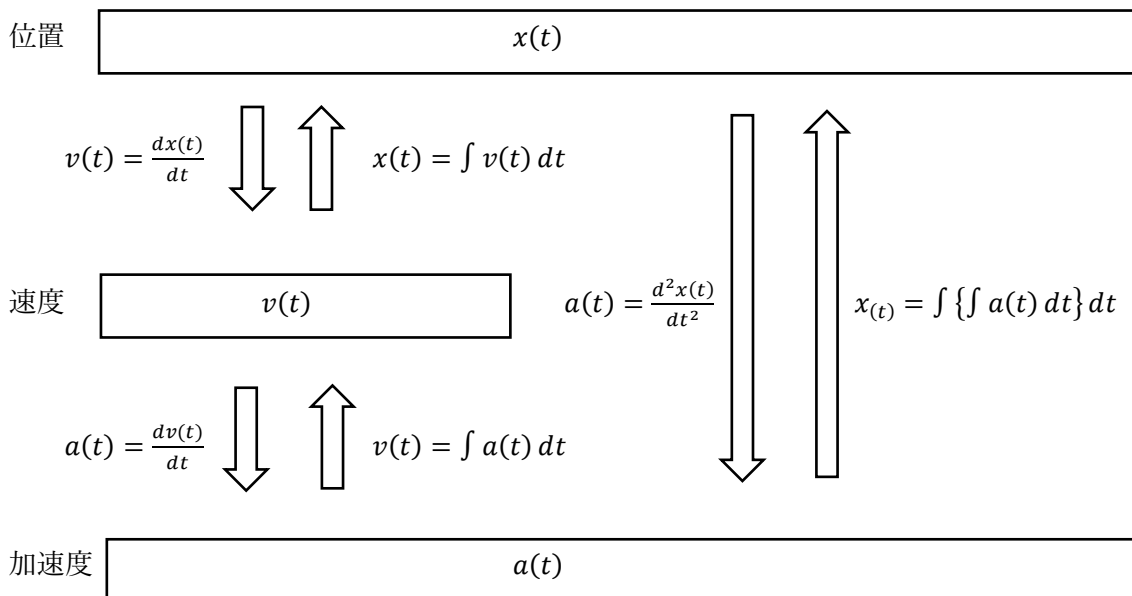
「加速度」の時間積分が「速度」、

「速度」の時間積分が「位置」となる。

数学定理

「位置」の時間2階微分が「加速度」、

「加速度」の時間2階積分が「位置」である。



【問題 1】 等速直線運動

(1) $x(t) = vt + x$ (v, x は定数) のとき、 $v(t), a(t)$ を求めよ。

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(vt + x) = v$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(v) = 0$$

(2) $v(t) = v$ (v は定数) のとき、 $x(t), a(t)$ を求めよ。ただし初期条件を、 $x(t_0) = x_0$ (t_0, x_0 は定数) とする。

$$x(t) = \int v(t) dt = \int v dt = vt + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

初期条件より

$$x(t_0) = vt_0 + C = x_0$$

であるから

$$C = x_0 - vt_0$$

以上より

$$x(t) = vt + C = vt + (x_0 - vt_0) = v(t - t_0) + x_0$$

また、

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(v) = 0$$

(3) $a(t) = 0$ のとき、 $v(t), x(t)$ を求めよ。ただし初期条件を、 $x(t_0) = x_0$, $v(t_1) = v_1$ (t_0, x_0, t_1, v_1 は定数) とする。

$$v(t) = \int a(t) dt = \int 0 dt = C \quad (C \text{ は積分定数})$$

初期条件より

$$v(t_1) = C = v_1$$

であるから

$$v(t) = v_1$$

また、

$$x(t) = \int v(t) dt = \int v_1 dt = v_1 t + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

初期条件より

$$x(t_0) = v_1 t_0 + C = x_0$$

であるから、

$$C = x_0 - v_1 t_0$$

以上より

$$x(t) = v_1 t + C = v_1 t + (x_0 - v_1 t_0) = v_1 (t - t_0) + x_0$$

(4) 直線上を運動する物体があり、加速度は常に 0 である。また、時刻 4 のときの位置は時刻 2 のときの位置の 3 倍である。このとき、位置が 0 でない時刻が少なくとも一つ存在するならば、位置が 0 になる時刻は時刻 1 に限られることを証明せよ。

時刻 t における物体の位置を $x(t)$ とおくと、仮定より $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = 0$ であることから、両辺を 2 階積分し

$$x(t) = C_1 t + C_2 \quad (C_1, C_2 \text{ は定数})$$

が得られる。

また、仮定より $x(4) = 3x(2)$ であることから、上記式に代入して

$$4C_1 + C_2 = 3(2C_1 + C_2)$$

より、

$$C_2 = -C_1$$

が得られ、したがって、

$$x(t) = C_1 t - C_1 = C_1(t - 1)$$

となる。

このとき、 $C_1 = 0$ と仮定すると、すべての時刻 t において $x(t) = 0$ となるので、「位置が 0 でない時刻が少なくとも一つ存在する」という仮定に反する。したがって、

$$C_1 \neq 0$$

である。

したがって、 $x(t) = 0$ の解は、すなわち $C_1(t - 1) = 0$ の解は、 $t = 1$ に限られる。

以上より題意は示された。

【問題 2】 等加速度運動

(1) $x(t) = \frac{a}{2}t^2 + vt + x$ (a, v, x は定数) のとき、 $v(t), a(t)$ を求めよ。

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{a}{2}t^2 + vt + x\right) = at + v$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(at + v) = a$$

(2) $v(t) = at + v$ (a, v は定数) のとき、 $x(t), a(t)$ を求めよ。ただし初期条件を、 $x(t_0) = x_0$ (t_0, x_0 は定数) とする。

$$x(t) = \int v(t) dt = \int (at + v) dt = \frac{a}{2}t^2 + vt + C \quad (C \text{は積分定数})$$

初期条件より

$$x(t_0) = \frac{a}{2}t_0^2 + vt_0 + C = x_0$$

であるから

$$C = x_0 - \left(\frac{a}{2}t_0^2 + vt_0\right)$$

以上より

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + vt + C = \frac{a}{2}t^2 + vt + \left\{x_0 - \left(\frac{a}{2}t_0^2 + vt_0\right)\right\} = \frac{a}{2}(t^2 - t_0^2) + v(t - t_0) + x_0$$

また、

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(at + v) = a$$

(3) $a(t) = a$ (a は定数) のとき、 $v(t), x(t)$ を求めよ。ただし初期条件を、 $x(t_0) = x_0$, $v(t_1) = v_1$ (t_0, x_0, t_1, v_1 は定数) とする。

$$v(t) = \int a(t) dt = \int a dt = at + C \quad (C \text{は積分定数})$$

初期条件より

$$v(t_1) = at_1 + C = v_1$$

であるから

$$C = v_1 - at_1$$

以上より

$$v(t) = at + (v_1 - at_1) = a(t - t_1) + v_1$$

また、

$$x(t) = \int v(t) dt = \int \{a(t - t_1) + v_1\} dt = \frac{a}{2}(t - t_1)^2 + v_1t + C \quad (C \text{は積分定数})$$

初期条件より

$$x(t_0) = \frac{a}{2}(t_0 - t_1)^2 + v_1t_0 + C = x_0$$

であるから、

$$C = x_0 - \left\{ \frac{a}{2}(t_0 - t_1)^2 + v_1t_0 \right\}$$

以上より

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a}{2}(t - t_1)^2 + v_1t + C \\ &= \frac{a}{2}(t - t_1)^2 + v_1t + \left[x_0 - \left\{ \frac{a}{2}(t_0 - t_1)^2 + v_1t_0 \right\} \right] \\ &= \frac{a}{2}\{(t - t_1)^2 - (t_0 - t_1)^2\} + v_1(t - t_0) + x_0 \end{aligned}$$

(4) 物体をある高さから垂直方向に投げたところ、加速度 -10 の等加速度運動を行い、時刻 2 のときの物体の高さは 95 で、物体の最高到達点の高さは 100 であった。このとき、時刻 4 のときの物体の高さを求めよ。

仮定より

$$a(t) = -10$$

であるので、

$$v(t) = \int a(t) dt = \int (-10) dt = -10t + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$x(t) = \int v(t) dt = \int (-10t + C) dt = -5t^2 + Ct + D \quad (D \text{ は積分定数})$$

である。

時刻 2 のときの高さが 95 であることから、

$$x(2) = -5 \times 2^2 + 2C + D = 2C + D - 20 = 95$$

であり、よって $D = -2C + 115$ であるので、これを代入して

$$x(t) = -5t^2 + Ct - 2C + 115$$

が得られる。

また、 $x(t)$ の軸は $t = \frac{C}{10}$ であることから、最高到達点は

$$x\left(\frac{C}{10}\right) = -5\left(\frac{C}{10}\right)^2 + C\left(\frac{C}{10}\right) - 2C + 115 = \frac{C^2}{20} - 2C + 115$$

であり、最高到達点の高さが 100 であることから、

$$\frac{C^2}{20} - 2C + 115 = 100$$

$$C^2 - 40C + 300 = 0$$

$$(C - 10)(C - 30) = 0$$

より、 $C = 10$ または $C = 30$ である。

$C = 10$ のとき、 $x(t) = -5t^2 + 10t - 20 + 115 = -5t^2 + 10t + 95$ であり、

よって、時刻 1 のときの物体の高さは $x(1) = -5 + 10 + 95 = 100$ である。

$C = 30$ のとき、 $x(t) = -5t^2 + 30t - 60 + 115 = -5t^2 + 30t + 55$ であり、

よって、時刻 1 のときの物体の高さは $x(1) = -5 + 30 + 55 = 80$ である。

【問題 3】 n 次の整式で表される運動

(1) $x(t) = \frac{b}{6}t^3 + \frac{a}{2}t^2 + vt + x$ (b, a, v, x は定数) のとき、 $v(t), a(t)$ を求めよ。

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{b}{6}t^3 + \frac{a}{2}t^2 + vt + x \right) = \frac{b}{2}t^2 + at + v$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{b}{2}t^2 + at + v \right) = bt + a$$

(2) $v(t) = \frac{b}{2}t^2 + at + v$ (b, a, v は定数) のとき、 $x(t), a(t)$ を求めよ。ただし初期条件を、 $x(t_0) = x_0$ (t_0, x_0 は定数) とする。

$$x(t) = \int v(t) dt = \int \left(\frac{b}{2}t^2 + at + v \right) dt = \frac{b}{6}t^3 + \frac{a}{2}t^2 + vt + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

初期条件より

$$x(t_0) = \frac{b}{6}t_0^3 + \frac{a}{2}t_0^2 + vt_0 + C = x_0$$

であるから

$$C = x_0 - \left(\frac{b}{6}t_0^3 + \frac{a}{2}t_0^2 + vt_0 \right)$$

以上より

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{b}{6}t^3 + \frac{a}{2}t^2 + vt + C \\ &= \frac{b}{6}t^3 + \frac{a}{2}t^2 + vt + \left\{ x_0 - \left(\frac{b}{6}t_0^3 + \frac{a}{2}t_0^2 + vt_0 \right) \right\} \\ &= \frac{b}{6}(t^3 - t_0^3) + \frac{a}{2}(t^2 - t_0^2) + v(t - t_0) + x_0 \end{aligned}$$

また、

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{b}{2}t^2 + at + v \right) = bt + a$$

(3) $a(t) = bt + a$ (b, a は定数) のとき、 $v(t), x(t)$ を求めよ。ただし初期条件を、 $x(t_0) = x_0$, $v(t_1) = v_1$ (t_0, x_0, t_1, v_1 は定数) とする。

$$v(t) = \int a(t) dt = \int (bt + a) dt = \frac{b}{2}t^2 + at + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

初期条件より

$$v(t_1) = \frac{b}{2}t_1^2 + at_1 + C = v_1$$

であるから

$$C = v_1 - \left(\frac{b}{2}t_1^2 + at_1\right)$$

以上より

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{b}{2}t^2 + at + \left\{v_1 - \left(\frac{b}{2}t_1^2 + at_1\right)\right\} \\ &= \frac{b}{2}(t^2 - t_1^2) + a(t - t_1) + v_1 \end{aligned}$$

また、

$$x(t) = \int v(t) dt = \int \left\{\frac{b}{2}(t^2 - t_1^2) + a(t - t_1) + v_1\right\} dt = \frac{b}{6}(t^3 - 3t_1^2t) + \frac{a}{2}(t - t_1)^2 + v_1t + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

初期条件より

$$x(t_0) = \frac{b}{6}(t_0^3 - 3t_1^2t_0) + \frac{a}{2}(t_0 - t_1)^2 + v_1t_0 + C = x_0$$

であるから、

$$C = x_0 - \left\{\frac{b}{6}(t_0^3 - 3t_1^2t_0) + \frac{a}{2}(t_0 - t_1)^2 + v_1t_0\right\}$$

以上より

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{b}{6}(t^3 - 3t_1^2t) + \frac{a}{2}(t - t_1)^2 + v_1t + C \\ &= \frac{b}{6}(t^3 - 3t_1^2t) + \frac{a}{2}(t - t_1)^2 + v_1t + \left[x_0 - \left\{\frac{b}{6}(t_0^3 - 3t_1^2t_0) + \frac{a}{2}(t_0 - t_1)^2 + v_1t_0\right\}\right] \\ &= \frac{b}{6}\{(t^3 - t_0^3) - 3t_1^2(t - t_0)\} + \frac{a}{2}\{(t - t_1)^2 - (t_0 - t_1)^2\} + v_1(t - t_0) + x_0 \end{aligned}$$

(4) 物体が $a(t) = pt + q$ (p, q は定数、 $p \neq 0$) で表される加速度で運動しており、また時刻 0 のときの位置は 0、時刻 1 の時の位置は $\frac{q}{2} + 3$ である。この物体の位置が 0 になる時刻が、時刻 0 以外にも存在するための条件を求め、その範囲を pq 平面上に図示せよ。

順次積分すると

$$v(t) = \int a(t) dt = \int (pt + q) dt = \frac{p}{2}t^2 + qt + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$x(t) = \int v(t) dt = \int \left\{ \frac{p}{2}t^2 + qt + C \right\} dt = \frac{p}{6}t^3 + \frac{q}{2}t^2 + Ct + D \quad (D \text{ は積分定数})$$

であり、また初期条件より $x(0) = D = 0$ 、 $x(1) = \frac{p}{6} + \frac{q}{2} + C + D = \frac{q}{2} + 3$ であるので、

$$C = 3 - \frac{p}{6}, \quad D = 0$$

であり、したがって

$$x(t) = \frac{p}{6}t^3 + \frac{q}{2}t^2 + \left(3 - \frac{p}{6}\right)t = t \left\{ \frac{p}{6}t^2 + \frac{q}{2}t + \left(3 - \frac{p}{6}\right) \right\}$$

が得られる。

いま、 $f(t) = \frac{p}{6}t^2 + \frac{q}{2}t + \left(3 - \frac{p}{6}\right)$ とおくと、題意の条件は「 $f(t) = 0$ が実数解を持ち、かつ、 $t = 0$ の重解ではない。」ことである。

まず、実数解を持つことから 判別式 $= \left(\frac{q}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{p}{6} \times \left(3 - \frac{p}{6}\right) \geq 0$ より

$$\frac{(p-9)^2}{81} + \frac{q^2}{36} \geq 1 \quad \cdots \star_1$$

を得る。

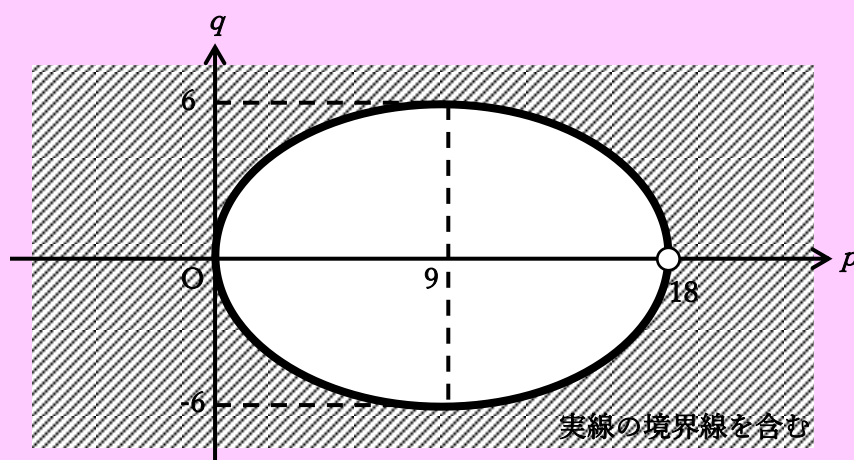
次に、 $t = 0$ の重解である条件が

$$f(0) = 0 \quad \text{より} \quad 3 - \frac{p}{6} = 0$$

$$\text{判別式} = 0 \quad \text{より} \quad \frac{(p-9)^2}{81} + \frac{q^2}{36} = 1$$

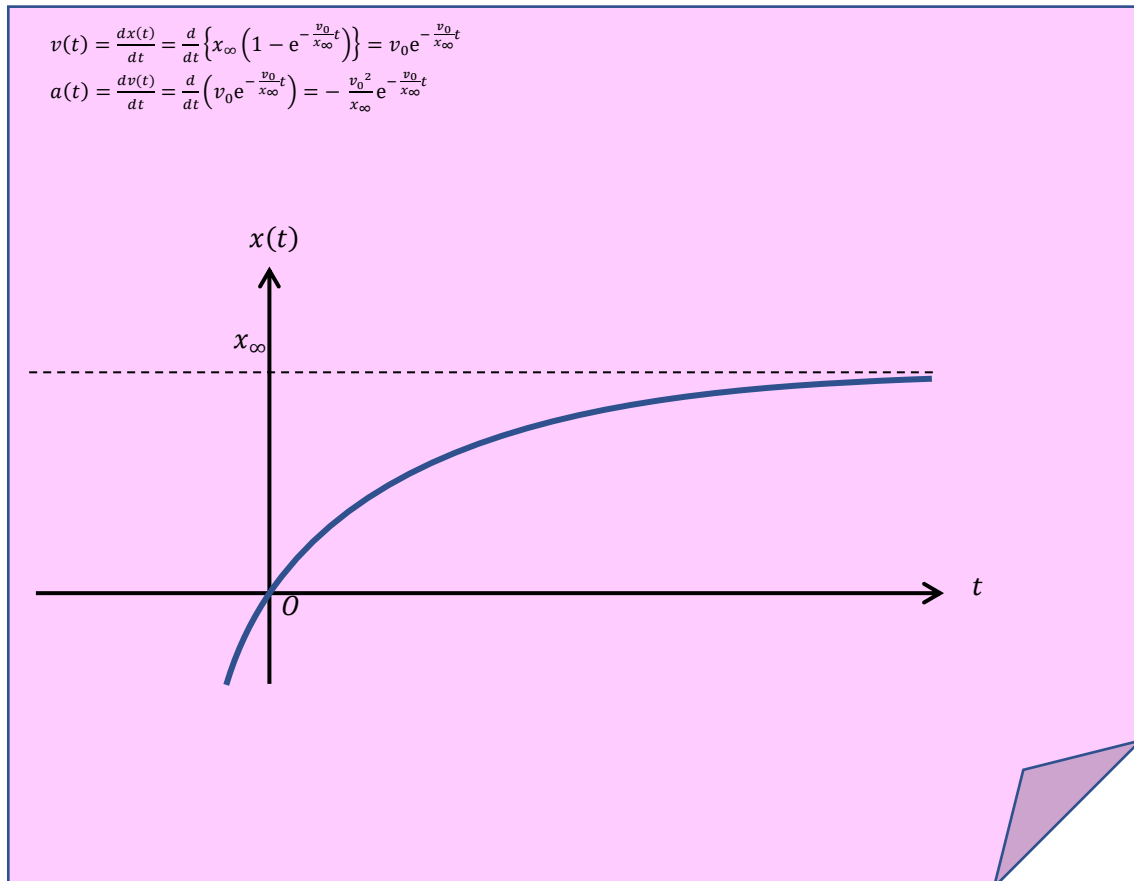
より、 $(p, q) = (18, 0)$ であるから、したがって $t = 0$ の重解ではないための条件は $(p, q) \neq (18, 0) \quad \cdots \star_2$ である。

★₁、★₂ を図示すると次の通り。



【問題 4】 等速直線運動（抵抗あり）

(1) $x(t) = x_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{v_0}{x_{\infty}}t}\right)$ (x_{∞}, v_0 は定数、 $x_{\infty} \neq 0$) のとき、 $v(t), a(t)$ を求めよ。また、 t と $x(t)$ のグラフを描け。



(2) $v(t) = v_0 e^{-\frac{v_0}{x_\infty} t}$ (x_∞, v_0 は定数、 $x_\infty \neq 0$) のとき、 $x(t), a(t)$ を求めよ。ただし初期条件を、 $x(0) = 0$ とする。また、 t と $v(t)$ のグラフを描け。

$$x(t) = \int v(t) dt = \int \left(v_0 e^{-\frac{v_0}{x_\infty} t} \right) dt = -x_\infty e^{-\frac{v_0}{x_\infty} t} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

初期条件より

$$x(t_0) = -x_\infty e^{-\frac{v_0}{x_\infty} t_0} + C = 0$$

であるから

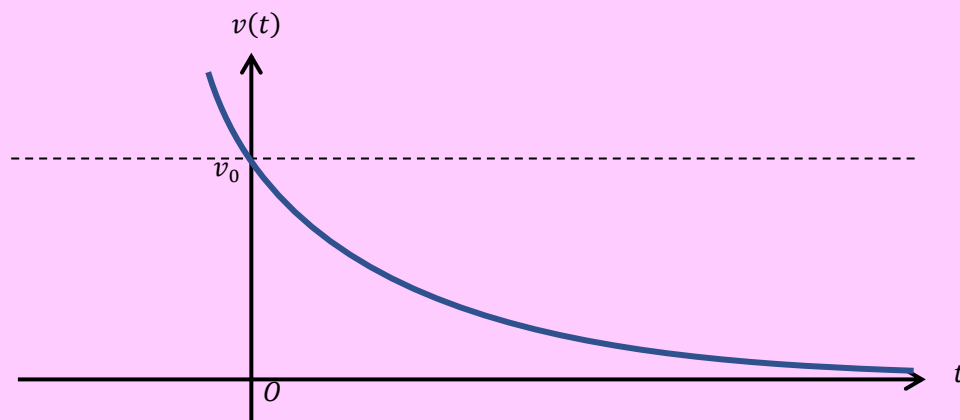
$$C = x_\infty e^{-\frac{v_0}{x_\infty} t_0}$$

以上より

$$x(t) = x_\infty \left(1 - e^{-\frac{v_0}{x_\infty} t} \right)$$

また、

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(v_0 e^{-\frac{v_0}{x_\infty} t} \right) = -\frac{v_0^2}{x_\infty} e^{-\frac{v_0}{x_\infty} t}$$



(3) $a(t) = -\frac{v_0^2}{x_\infty} e^{-\frac{v_0}{x_\infty} t}$ (x_∞, v_0 は定数、 $x_\infty \neq 0$) のとき、 $v(t), x(t)$ を求めよ。ただし初期条件を、 $x(0) = 0, v(0) = v_0$ (v_0 は定数) とする。また、 t と $a(t)$ のグラフを描け。

$$v(t) = \int a(t) dt = \int \left(-\frac{v_0^2}{x_\infty} e^{-\frac{v_0}{x_\infty} t} \right) dt = v_0 e^{-\frac{v_0}{x_\infty} t} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

初期条件より

$$v(0) = v_0 + C = v_0$$

であるから

$$C = 0$$

以上より

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{v_0}{x_\infty} t}$$

また、

$$x(t) = \int v(t) dt = \int \left(v_0 e^{-\frac{v_0}{x_\infty} t} \right) dt = -x_\infty e^{-\frac{v_0}{x_\infty} t} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

初期条件より

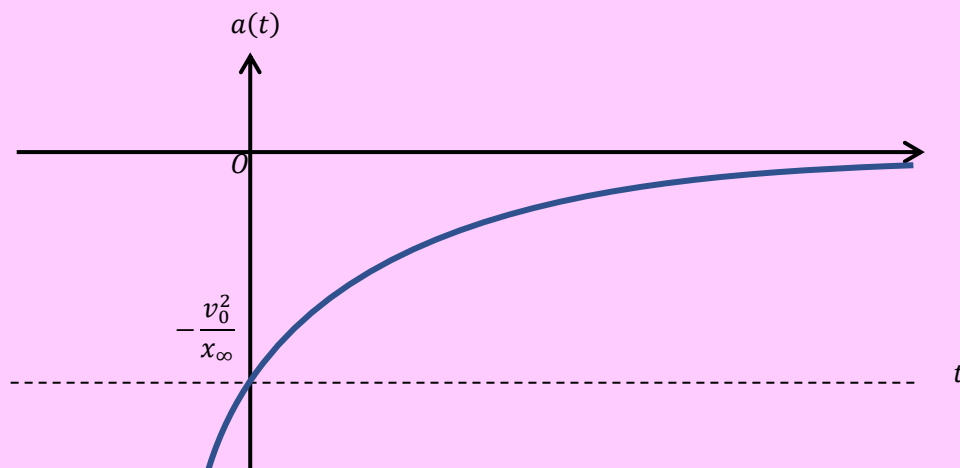
$$x(0) = -x_\infty + C = 0$$

であるから、

$$C = x_\infty$$

以上より

$$x(t) = x_\infty \left(1 - e^{-\frac{v_0}{x_\infty} t} \right)$$



(4) 上記のとき、 $a(t)$ が $v(t)$ に比例することを確認し、比例定数を求めよ。

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{v_0}{x_\infty} t}, \quad a(t) = -\frac{v_0^2}{x_\infty} e^{-\frac{v_0}{x_\infty} t} \quad \text{より、}$$

$$a(t) = \left(-\frac{v_0}{x_\infty}\right) v(t)$$

であるから、 $a(t)$ は $v(t)$ に比例しており、比例定数は $-\frac{v_0}{x_\infty}$ である。

(注) 物体の質量を m として、 $\frac{v_0}{x_\infty} = \frac{k}{m}$ とおくと、

$$\begin{cases} x(t) = \frac{mv_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t}\right) \\ v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m} t} \\ a(t) = \frac{-k v(t)}{m} \end{cases}$$

となる。

k は空気抵抗を表す比例係数。

初速 v_0 のとき、物体の移動距離は $\frac{mv_0}{k}$ を超えることはない。

(5) 上記において $v(t_2) = \frac{1}{2}v(t_1)$ であるとき、 $t_2 - t_1$ を求め、 t_2, t_1 に依らない定数であることを確認せよ。

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{v_0}{x_\infty} t} \text{より、} v(t_2) = \frac{1}{2}v(t_1) \quad \text{のとき}$$

$$v_0 e^{-\frac{v_0}{x_\infty} t_2} = \frac{1}{2} v_0 e^{-\frac{v_0}{x_\infty} t_1}$$

$$2e^{-\frac{v_0}{x_\infty} t_2} = e^{-\frac{v_0}{x_\infty} t_1}$$

$$\log 2 - \frac{v_0}{x_\infty} t_2 = -\frac{v_0}{x_\infty} t_1$$

$$t_2 - t_1 = \frac{x_\infty}{v_0} \log 2$$

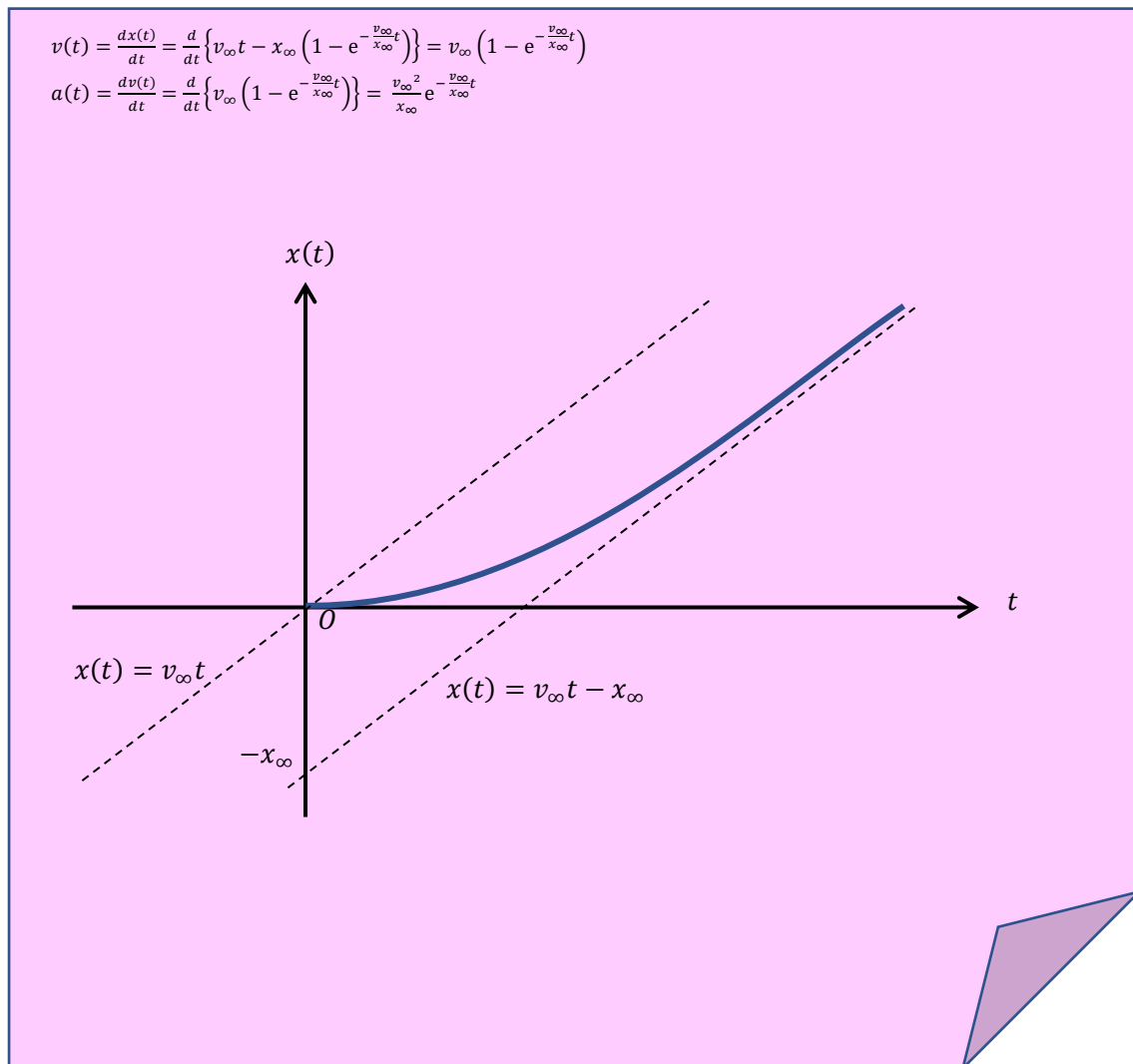
(注) この $t_2 - t_1$ は速度の半減期であり、 $t_2 - t_1 = \frac{m}{k} \log 2$ と表される。

したがって半減期は、 k, m のみによって定まる定数である。

【問題 5】 等加速度運動（抵抗あり）

(1) $x(t) = v_{\infty}t - x_{\infty}\left(1 - e^{-\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}}t}\right)$ (x_{∞}, v_{∞} は定数、 $x_{\infty} \neq 0$) のとき、 $v(t), a(t)$ を求めよ。

また、 t と $x(t)$ のグラフを描け。



(2) $v(t) = v_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}}t}\right)$ (x_{∞}, v_{∞} は定数、 $x_{\infty} \neq 0$) のとき、 $x(t), a(t)$ を求めよ。ただし初期条件を、 $x(0) = 0$ とする。また、 t と $v(t)$ のグラフを描け。

$$x(t) = \int v(t) dt = \int \left\{ v_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}}t}\right) \right\} dt = v_{\infty}t + \frac{x_{\infty}}{v_{\infty}} e^{-\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}}t} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

初期条件より

$$x(0) = \frac{x_{\infty}}{v_{\infty}} + C = 0$$

であるから

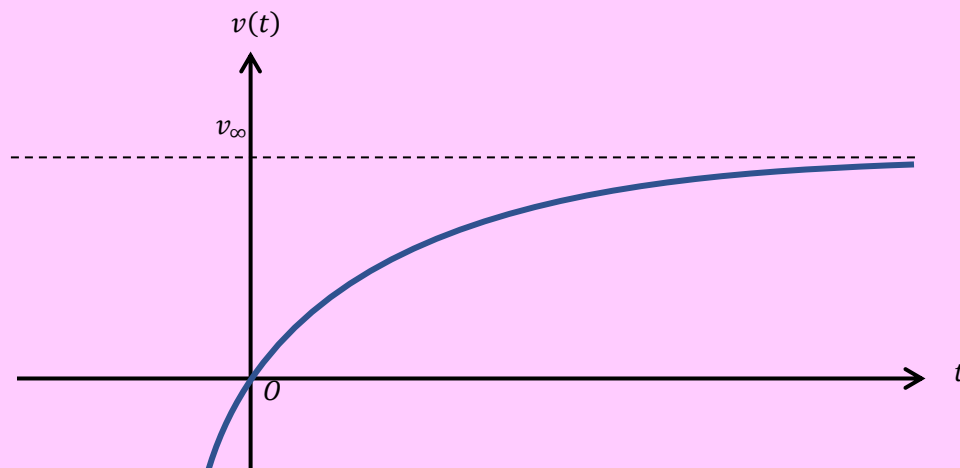
$$C = -\frac{x_{\infty}}{v_{\infty}}$$

以上より

$$x(t) = v_{\infty}t - x_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}}t}\right)$$

また、

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ v_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}}t}\right) \right\} = \frac{v_{\infty}^2}{x_{\infty}} e^{-\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}}t}$$



(3) $a(t) = \frac{v_{\infty}^2}{x_{\infty}} e^{-\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}} t}$ (x_{∞}, v_{∞} は定数、 $x_{\infty} \neq 0$) のとき、 $v(t), x(t)$ を求めよ。ただし初期条件を、 $x(0) = 0, v(0) = 0$ とする。また、 t と $a(t)$ のグラフを描け。

$$v(t) = \int a(t) dt = \int \left(\frac{v_{\infty}^2}{x_{\infty}} e^{-\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}} t} \right) dt = -v_{\infty} e^{-\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}} t} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

初期条件より

$$v(0) = -v_{\infty} + C = 0$$

であるから

$$C = v_{\infty}$$

以上より

$$v(t) = v_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}} t} \right)$$

また、

$$x(t) = \int v(t) dt = \int \left\{ v_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}} t} \right) \right\} dt = v_{\infty} t + x_{\infty} e^{-\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}} t} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

初期条件より

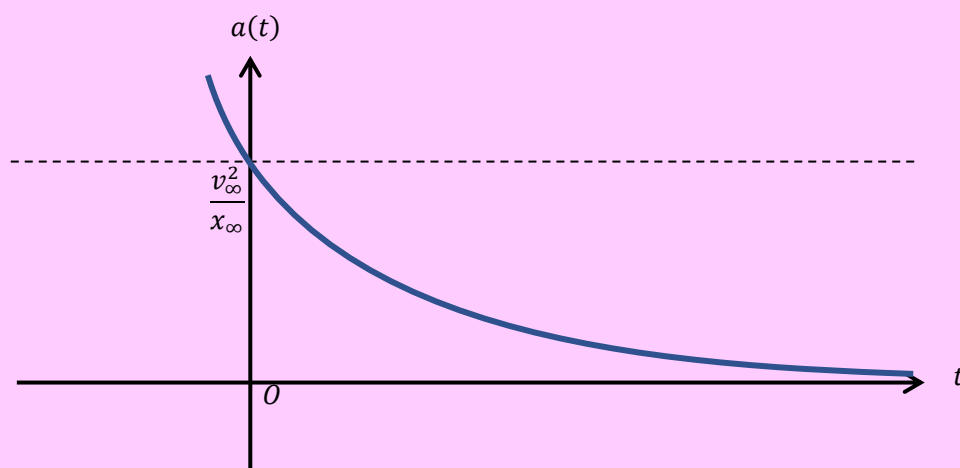
$$x(0) = x_{\infty} + C = 0$$

であるから、

$$C = -x_{\infty}$$

以上より

$$x(t) = v_{\infty} t - x_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}} t} \right)$$



(4) 上記のとき、 $a(t)$ が $\{v_{\infty} - v(t)\}$ に比例することを確認し、比例定数を求めよ。

$$v(t) = v_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}} t}\right) \text{ より } v_{\infty} e^{-\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}} t} = v_{\infty} - v(t)$$

$$a(t) = \frac{v_{\infty}^2}{x_{\infty}} e^{-\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}} t} \text{ より } a(t) = \left(\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}}\right) v_{\infty} e^{-\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}} t} \text{ なので、}$$

$$a(t) = \left(\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}}\right) \{v_{\infty} - v(t)\}$$

であるから、 $a(t)$ は $\{v_{\infty} - v(t)\}$ に比例しており、比例定数は $\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}}$ である。

(注) 物体の質量を m として、 $\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}} = \frac{k}{m}$ 、 $kv_{\infty} = F$ とおくと、

$$\begin{cases} x(t) = \frac{F}{k} \left(t - \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right) \right) \\ v(t) = \frac{F}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right) \\ a(t) = \frac{F - kv(t)}{m} \end{cases}$$

となる。

k は空気抵抗を表す比例係数、 F は物体に作用する力。

物体の移動距離は $\frac{F}{k}$ を超えることはない。

(5) 上記において $a(t_2) = \frac{1}{2}a(t_1)$ であるとき、 $t_2 - t_1$ を求め、 t_2, t_1 に依らない定数であることを確認せよ。

$$a(t) = \frac{v_{\infty}^2}{x_{\infty}} e^{-\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}} t} \text{ より、 } v(t_2) = \frac{1}{2} v(t_1) \text{ のとき}$$

$$\frac{v_{\infty}^2}{x_{\infty}} e^{-\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}} t_2} = \frac{1}{2} \frac{v_{\infty}^2}{x_{\infty}} e^{-\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}} t_1}$$

$$2e^{-\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}} t_2} = e^{-\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}} t_1}$$

$$\log 2 - \frac{v_{\infty}}{x_{\infty}} t_2 = -\frac{v_{\infty}}{x_{\infty}} t_1$$

$$t_2 - t_1 = \frac{x_{\infty}}{v_{\infty}} \log 2$$

(注) この $t_2 - t_1$ は加速度の半減期であり、 $t_2 - t_1 = \frac{m}{k} \log 2$ と表される。

したがって半減期は、 k, m のみによって定まる定数である。

【問題 6】 単振動

(1) $x(t) = A \sin(\omega t + \theta)$ (A (振幅)、 ω (角速度)、 θ (初期位相角) は定数、また ω は正とする。) のとき、 $v(t), a(t)$ を求めよ。

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \{A \sin(\omega t + \theta)\} = \omega A \cos(\omega t + \theta)$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \{\omega A \cos(\omega t + \theta)\} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \theta)$$

(2) 上記のとき、 $a(t)$ が $x(t)$ に比例することを確認し、比例定数を求めよ。

$x(t) = A \sin(\omega t + \theta)$ 、 $a(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \theta)$ なので、

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

であるから、 $a(t)$ は $x(t)$ に比例しており、比例定数は $-\omega^2$ である。

(注) 物体の質量を m として、 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とおくと、

$$ma(t) = -k x(t)$$

となる。

k は「ばね定数」であり、中立点からの変位の大きさに比例して、中立点に向かって復元するような加速度が発生することを意味している。

このとき、

$$\begin{cases} x(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta\right) \\ v(t) = \sqrt{\frac{k}{m}}A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta\right) \\ a(t) = -\frac{k}{m}A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta\right) = -\frac{k}{m}x(t) \end{cases}$$

となる。

(3) 物体の位置、速度、加速度が、

$$\begin{cases} x(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta\right) \\ v(t) = \sqrt{\frac{k}{m}}A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta\right) \\ a(t) = -\frac{k}{m}A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta\right) = -\frac{k}{m}x(t) \end{cases}$$

A (振幅)、 k (ばね定数)、 m (物体の質量) はいずれも正の定数で与えられるとする。

また、初期条件を $x(0) = x_0, v(0) = v_0$ (x_0, v_0 は定数) とする。このとき、

- ① $A, \sin \theta, \cos \theta$ を、 k, m, x_0, v_0 の式で表せ。
- ② $x(t), v(t), a(t)$ を、 k, m, x_0, v_0 を用いて表せ。

① $x(0) = x_0, v(0) = v_0$ を与式に代入して

$$\begin{cases} x(0) = A \sin \theta = x_0 \\ v(0) = \sqrt{\frac{k}{m}}A \cos \theta = v_0 \end{cases}$$

より、

$$\begin{cases} A^2 \sin^2 \theta = x_0^2 \\ A^2 \cos^2 \theta = \frac{m}{k}v_0^2 \end{cases}$$

であるから、両辺たし算して $A^2 = x_0^2 + \frac{mv_0^2}{k}$ なので、

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2}$$

したがって、

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{x_0}{A} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2}} \\ \cos \theta = \frac{\sqrt{\frac{m}{k}}v_0}{A} = \frac{\sqrt{\frac{m}{k}}v_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2}} \end{cases}$$

②

$$\begin{aligned}
 x(t) &= A \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta \right) \\
 &= \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k} v_0^2} \left\{ \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \cos \theta + \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \sin \theta \right\} \\
 &= \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k} v_0^2} \left\{ \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \frac{\frac{\sqrt{m} v_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k} v_0^2}}}{\frac{\sqrt{m} v_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k} v_0^2}}} + \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \frac{x_0}{\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k} v_0^2}}} \right\} \\
 &= \sqrt{\frac{m}{k}} v_0 \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + x_0 \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \sqrt{\frac{k}{m}} A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta \right) \\
 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k} v_0^2} \left\{ \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \cos \theta - \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \sin \theta \right\} \\
 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k} v_0^2} \left\{ \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \frac{\frac{\sqrt{m} v_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k} v_0^2}}}{\frac{\sqrt{m} v_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k} v_0^2}}} - \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \frac{x_0}{\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k} v_0^2}}} \right\} \\
 &= v_0 \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) - \sqrt{\frac{k}{m}} x_0 \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a(t) &= -\frac{k}{m} x(t) \\
 &= -\frac{k}{m} \left\{ \sqrt{\frac{m}{k}} v_0 \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + x_0 \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right\} \\
 &= -\sqrt{\frac{k}{m}} v_0 \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) - \frac{k}{m} x_0 \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right)
 \end{aligned}$$

【解説 2】 位置、速度、加速度の関係 (n 次元の場合)

数学的定義

物体が n 次元空間上を運動している場合でも、各々の成分ごとに考えると、1 次元の場合の位置、速度、加速度の関係と同じである。▶Video

n 次元の場合、位置、速度、加速度をベクトルとして取り扱うと便利である。▶Video

位置ベクトル

$$\vec{x}(t) = (x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(n)}(t))$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \quad \Downarrow \quad \Uparrow \quad \vec{x}(t) = \int \vec{v}(t) dt$$

速度ベクトル

$$\vec{v}(t) = (v^{(1)}(t), v^{(2)}(t), \dots, v^{(n)}(t)) \quad \vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} \quad \vec{x}(t) = \int \left\{ \int \vec{a}(t) dt \right\} dt$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \quad \Downarrow \quad \Uparrow \quad \vec{v}(t) = \int \vec{a}(t) dt$$

加速度ベクトル

$$\vec{a}(t) = (a^{(1)}(t), a^{(2)}(t), \dots, a^{(n)}(t))$$

数学的定義

ベクトル関数の微分、積分の定義は次の通り。

$$\text{微分} \quad \frac{d\vec{f}(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h}$$

$$\text{積分} \quad \frac{d\vec{F}(t)}{dt} = \vec{f}(t) \text{ のとき、} \int \vec{f}(t) dt = \vec{F}(t) + \vec{C} \quad (\vec{C} \text{ は定ベクトル})$$

【問題 7】 ベクトル関数の微分、積分（性質）

(1) ベクトル関数の微分の定義に基づき、 $\vec{f}(t) = (f^{(1)}(t), f^{(2)}(t), \dots, f^{(n)}(t))$ のと

き、 $\frac{d\vec{f}(t)}{dt} = \left(\frac{df^{(1)}(t)}{dt}, \frac{df^{(2)}(t)}{dt}, \dots, \frac{df^{(n)}(t)}{dt} \right)$ であることを示せ。

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{f}(t)}{dt} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f^{(1)}(t+h), f^{(2)}(t+h), \dots, f^{(n)}(t+h)) - (f^{(1)}(t), f^{(2)}(t), \dots, f^{(n)}(t))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f^{(1)}(t+h) - f^{(1)}(t)}{h}, \frac{f^{(2)}(t+h) - f^{(2)}(t)}{h}, \dots, \frac{f^{(n)}(t+h) - f^{(n)}(t)}{h} \right) \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(1)}(t+h) - f^{(1)}(t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(2)}(t+h) - f^{(2)}(t)}{h}, \dots, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(t+h) - f^{(n)}(t)}{h} \right) \\ &= \left(\frac{df^{(1)}(t)}{dt}, \frac{df^{(2)}(t)}{dt}, \dots, \frac{df^{(n)}(t)}{dt} \right) \end{aligned}$$

(2) ベクトル関数の微分の定義に基づき、次の各式を証明せよ。

$$\frac{d}{dt} \{ \vec{f}(t) + \vec{g}(t) \} = \frac{d\vec{f}(t)}{dt} + \frac{d\vec{g}(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \{ C\vec{f}(t) \} = C \frac{d\vec{f}(t)}{dt} \quad (C \text{ は定数})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{ \vec{f}(t) + \vec{g}(t) \} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t+h) + \vec{g}(t+h) - [\vec{f}(t) + \vec{g}(t)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} + \frac{\vec{g}(t+h) - \vec{g}(t)}{h} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} \right\} + \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\vec{g}(t+h) - \vec{g}(t)}{h} \right\} \\ &= \frac{d\vec{f}(t)}{dt} + \frac{d\vec{g}(t)}{dt} \\ \frac{d}{dt} \{ C\vec{f}(t) \} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C\vec{f}(t+h) - C\vec{f}(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t))}{h} \\ &= C \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} \\ &= C \frac{d\vec{f}(t)}{dt} \end{aligned}$$

(3) ベクトル関数の積分の定義に基づき、

$$\vec{f}(t) = (f^{(1)}(t), f^{(2)}(t), \dots, f^{(n)}(t))$$

のとき、

$$\int \vec{f}(t) dt = (\int f^{(1)}(t) dt, \int f^{(2)}(t) dt, \dots, \int f^{(n)}(t) dt)$$

であることを示せ。

(1) より、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\int f^{(1)}(t) dt, \int f^{(2)}(t) dt, \dots, \int f^{(n)}(t) dt) &= (\frac{d}{dt} \int f^{(1)}(t) dt, \frac{d}{dt} \int f^{(2)}(t) dt, \dots, \frac{d}{dt} \int f^{(n)}(t) dt) \\ &= (f^{(1)}(t), f^{(2)}(t), \dots, f^{(n)}(t)) \\ &= \vec{f}(t) \end{aligned}$$

と表される。

したがって、ベクトル関数の積分の定義に基づき、

$$\int \vec{f}(t) dt = (\int f^{(1)}(t) dt, \int f^{(2)}(t) dt, \dots, \int f^{(n)}(t) dt) + \vec{c} \quad (\vec{c} \text{は定ベクトル})$$

である。

$\vec{c}$ は各々の $\int f^{(k)}(t) dt$ の積分定数に含まれると考えれば省略してよく、したがって

$$\int \vec{f}(t) dt = (\int f^{(1)}(t) dt, \int f^{(2)}(t) dt, \dots, \int f^{(n)}(t) dt)$$

と書ける。

(4) 次の各式を証明せよ。

$$\textcircled{1} \int \{\vec{f}(t) + \vec{g}(t)\} dt = \int \vec{f}(t) dt + \int \vec{g}(t) dt$$

$$\textcircled{2} \int C\vec{f}(t) dt = C \int \vec{f}(t) dt \quad (C \text{ は定数})$$

$$\textcircled{3} \int C(t)\vec{f} dt = \int C(t) dt \times \vec{f} \quad (\vec{f} \text{ は定ベクトル})$$

①

いま

$$\begin{cases} \vec{f}(t) = (f^{(1)}(t), f^{(2)}(t), \dots, f^{(n)}(t)) \\ \vec{g}(t) = (g^{(1)}(t), g^{(2)}(t), \dots, g^{(n)}(t)) \end{cases}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \int \{\vec{f}(t) + \vec{g}(t)\} dt \\ &= \int \{(f^{(1)}(t), f^{(2)}(t), \dots, f^{(n)}(t)) + (g^{(1)}(t), g^{(2)}(t), \dots, g^{(n)}(t))\} dt \\ &= \int (f^{(1)}(t) + g^{(1)}(t), f^{(2)}(t) + g^{(2)}(t), \dots, f^{(n)}(t) + g^{(n)}(t)) dt \end{aligned}$$

であり、したがって (3) より

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \left(\int (f^{(1)}(t) + g^{(1)}(t)) dt, \int (f^{(2)}(t) + g^{(2)}(t)) dt, \dots, \int (f^{(n)}(t) + g^{(n)}(t)) dt \right) \\ &= \left(\int f^{(1)}(t) dt + \int g^{(1)}(t) dt, \int f^{(2)}(t) dt + \int g^{(2)}(t) dt, \dots, \int f^{(n)}(t) dt + \int g^{(n)}(t) dt \right) \\ &= \left(\int f^{(1)}(t) dt, \int f^{(2)}(t) dt, \dots, \int f^{(n)}(t) dt \right) + \left(\int g^{(1)}(t) dt, \int g^{(2)}(t) dt, \dots, \int g^{(n)}(t) dt \right) \\ &= \int (f^{(1)}(t), f^{(2)}(t), \dots, f^{(n)}(t)) dt + \int (g^{(1)}(t), g^{(2)}(t), \dots, g^{(n)}(t)) dt \\ &= \int \vec{f}(t) dt + \int \vec{g}(t) dt \\ &= (\text{右辺}) \end{aligned}$$

以上より (左辺) = (右辺) が成り立つ。

②

いま

$$\vec{f}(t) = (f^{(1)}(t), f^{(2)}(t), \dots, f^{(n)}(t))$$

とおくと、

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \int C \vec{f}(t) dt \\ &= \int C (f^{(1)}(t), f^{(2)}(t), \dots, f^{(n)}(t)) dt \\ &= \int (C f^{(1)}(t), C f^{(2)}(t), \dots, C f^{(n)}(t)) dt \end{aligned}$$

であり、したがって (3) より

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= (\int C f^{(1)}(t) dt, \int C f^{(2)}(t) dt, \dots, \int C f^{(n)}(t) dt) \\ &= (C \int f^{(1)}(t) dt, C \int f^{(2)}(t) dt, \dots, C \int f^{(n)}(t) dt) \\ &= C (\int f^{(1)}(t) dt, \int f^{(2)}(t) dt, \dots, \int f^{(n)}(t) dt) \\ &= C \int \vec{f}(t) dt \\ &= (\text{右辺}) \end{aligned}$$

以上より (左辺) = (右辺) が成り立つ。

③

いま

$$\vec{f} = (f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)})$$

とおくと、(3) より

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \int C(t) \vec{f} dt \\ &= \int (C(t) f^{(1)}, C(t) f^{(2)}, \dots, C(t) f^{(n)}) dt \\ &= (\int C(t) f^{(1)} dt, \int C(t) f^{(2)} dt, \dots, \int C(t) f^{(n)} dt) \\ &= (\int C(t) dt \times f^{(1)}, \int C(t) dt \times f^{(2)}, \dots, \int C(t) dt \times f^{(n)}) \\ &= \int C(t) dt (f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}) \\ &= \int C(t) dt \times \vec{f} \\ &= (\text{右辺}) \end{aligned}$$

以上より (左辺) = (右辺) が成り立つ。

【問題 8】 放物運動（2 次元）

(1) $\vec{x}(t) = \left(v^{(1)}t + x^{(1)}, \frac{a^{(2)}}{2}t^2 + v^{(2)}t + x^{(2)} \right)$ ($v^{(1)}, x^{(1)}, a^{(2)}, v^{(2)}, x^{(2)}$ は定数) のとき、 $\vec{v}(t), \vec{a}(t)$ を求め、成分表示せよ。

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{d}{dt} \vec{x}(t) \\ &= \frac{d}{dt} \left(v^{(1)}t + x^{(1)}, \frac{a^{(2)}}{2}t^2 + v^{(2)}t + x^{(2)} \right) \\ &= \left(\frac{d}{dt} (v^{(1)}t + x^{(1)}), \frac{d}{dt} \left(\frac{a^{(2)}}{2}t^2 + v^{(2)}t + x^{(2)} \right) \right) \\ &= (v^{(1)}, a^{(2)}t + v^{(2)}) \\ \vec{a}(t) &= \frac{d}{dt} \vec{v}(t) \\ &= \frac{d}{dt} (v^{(1)}, a^{(2)}t + v^{(2)}) \\ &= \left(\frac{d}{dt} (v^{(1)}), \frac{d}{dt} (a^{(2)}t + v^{(2)}) \right) \\ &= (0, a^{(2)})\end{aligned}$$

(2) $\vec{a}(t) = (0, a^{(2)})$ ($a^{(2)}$ は定数) のとき、 $\vec{v}(t)$, $\vec{x}(t)$ を求め、成分表示せよ。ただし初期条件を、 $\vec{x}(t_0) = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)})$, $\vec{v}(t_1) = (v_1^{(1)}, v_1^{(2)})$ ($x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, v_1^{(1)}, v_1^{(2)}$ は定数) とする。

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \int \vec{a}(t) dt \\ &= \int (0, a^{(2)}) dt \\ &= (\int 0 dt, \int a^{(2)} dt) \\ &= (C^{(1)}, a^{(2)}t + C^{(2)}) \quad (C^{(1)}, C^{(2)} \text{は積分定数})\end{aligned}$$

初期条件より

$$\vec{v}(t_1) = (C^{(1)}, a^{(2)}t_1 + C^{(2)}) = (v_1^{(1)}, v_1^{(2)})$$

であることから、

$$C^{(1)} = v_1^{(1)}, C^{(2)} = -a^{(2)}t_1 + v_1^{(2)}$$

なので、

$$\vec{v}(t) = (v_1^{(1)}, a^{(2)}(t - t_1) + v_1^{(2)})$$

一方、

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= \int \vec{v}(t) dt \\ &= \int (v_1^{(1)}, a^{(2)}(t - t_1) + v_1^{(2)}) dt \\ &= (\int v_1^{(1)} dt, \int (a^{(2)}(t - t_1) + v_1^{(2)}) dt) \\ &= (v_1^{(1)}t + D^{(1)}, \frac{a^{(2)}}{2}(t - t_1)^2 + v_1^{(2)}t + D^{(2)}) \quad (D^{(1)}, D^{(2)} \text{は積分定数})\end{aligned}$$

初期条件より

$$\vec{x}(t_0) = (v_1^{(1)}t_0 + D^{(1)}, \frac{a^{(2)}}{2}(t_0 - t_1)^2 + v_1^{(2)}t_0 + D^{(2)}) = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)})$$

であることから、

$$D^{(1)} = -v_1^{(1)}t_0 + x_0^{(1)}, D^{(2)} = -\frac{a^{(2)}}{2}(t_0 - t_1)^2 - v_1^{(2)}t_0 + x_0^{(2)}$$

なので、

$$\vec{x}(t) = (v_1^{(1)}(t - t_0) + x_0^{(1)}, \frac{a^{(2)}}{2}\{(t - t_1)^2 - (t_0 - t_1)^2\} + v_1^{(2)}(t - t_0) + x_0^{(2)})$$

(3) xy 平面上を運動する物体がある。物体の加速度は時刻にかかわらず一定で、 $(0, 2)$ である。また $\alpha + \beta = 7$ をみたす時刻 α と時刻 β において、時刻 α における物体の鉛直方向の速度は、時刻 β における物体の鉛直方向の速度より 6 大きい。時刻 α における物体の位置は、時刻 β における物体の位置より水平方向に 9 大きく、垂直方向にも 9 大きい。さらに時刻 $\alpha - 2\beta$ における物体の位置は $(2, 2)$ である。
このとき、時刻 4 における物体の位置を求めよ。

仮定より

$$\alpha + \beta = 7 \quad \cdots \star_1$$

また、仮定より $\vec{a}(t) = (0, 2)$ であるから、

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \int \vec{a}(t) dt \\ &= \int (0, 2) dt \\ &= (C^{(1)}, 2t + C^{(2)}) \quad (C^{(1)}, C^{(2)} \text{は積分定数}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \int \vec{v}(t) dt \\ &= \int (C^{(1)}, 2t + C^{(2)}) dt \\ &= (C^{(1)}t + D^{(1)}, t^2 + C^{(2)}t + D^{(2)}) \quad (C^{(1)}, C^{(2)} \text{は積分定数}) \end{aligned}$$

時刻 α における物体の鉛直方向の速度が、時刻 β における物体の鉛直方向の速度より 6 大きいので、

$$2\alpha + C^{(2)} = 2\beta + C^{(2)} + 6 \quad \cdots \star_2$$

時刻 α における物体の位置が、時刻 β における物体の位置より水平方向に 9 大きいので、

$$C^{(1)}\alpha + D^{(1)} = C^{(1)}\beta + D^{(1)} + 9 \quad \cdots \star_3$$

時刻 α における物体の位置が、時刻 β における物体の位置より垂直方向に 9 大きいので、

$$\alpha^2 + C^{(2)}\alpha + D^{(2)} = \beta^2 + C^{(2)}\beta + D^{(2)} + 9 \quad \cdots \star_4$$

$$\star_1, \star_2 \text{より} \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 7 \\ \alpha - \beta = 3 \end{cases} \text{であり、これを解くと} \quad \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

$$\star_3 \text{に代入して} \quad 5C^{(1)} + D^{(1)} = 2C^{(1)} + D^{(1)} + 9 \text{ であり、これを解くと} \quad C^{(1)} = 3$$

$$\star_4 \text{に代入して} \quad 25 + 5C^{(2)} + D^{(2)} = 4 + 2C^{(2)} + D^{(2)} + 9 \text{ であり、これを解くと} \quad C^{(2)} = -4$$

時刻 $\alpha - 2\beta$ はすなわち時刻 $5 - 2 \times 2 = 1$ であり、そのときの物体の位置が $(2, 2)$ なので、

$$\begin{cases} C^{(1)} + D^{(1)} = 2 \\ 1 + C^{(2)} + D^{(2)} = 2 \end{cases} \text{であり、よって} \quad \begin{cases} 3 + D^{(1)} = 2 \\ 1 - 4 + D^{(2)} = 2 \end{cases} \text{なので} \quad \begin{cases} D^{(1)} = -1 \\ D^{(2)} = 5 \end{cases}$$

以上より、

$$\vec{x}(t) = (3t - 1, t^2 - 4t + 5)$$

であり、したがって、

$$\vec{x}(4) = (11, 5)$$

である。

【問題 9】 等速円運動

$\vec{x}(t) = A (\cos(\omega t + \theta_0), \sin(\omega t + \theta_0))$ (A, ω, θ_0 は定数、 $A > 0, \omega \neq 0$) とする。

(1) $\vec{v}(t), \vec{a}(t)$ を求め、成分表示せよ。

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{d}{dt} \vec{x}(t) \\ &= \frac{d}{dt} \{A (\cos(\omega t + \theta_0), \sin(\omega t + \theta_0))\} \\ &= \omega A (-\sin(\omega t + \theta_0), \cos(\omega t + \theta_0)) \\ \vec{a}(t) &= \frac{d}{dt} \vec{v}(t) \\ &= \frac{d}{dt} \{\omega A (-\sin(\omega t + \theta_0), \cos(\omega t + \theta_0))\} \\ &= -\omega^2 A (\cos(\omega t + \theta_0), \sin(\omega t + \theta_0))\end{aligned}$$

(2) $\vec{a}(t)$ が $\vec{x}(t)$ の定数倍であることを示し、その定数を求めよ。

$$\begin{cases} \vec{x}(t) = A (\cos(\omega t + \theta_0), \sin(\omega t + \theta_0)) \\ \vec{a}(t) = -\omega^2 A (\cos(\omega t + \theta_0), \sin(\omega t + \theta_0)) \end{cases}$$

であるから、

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{x}(t)$$

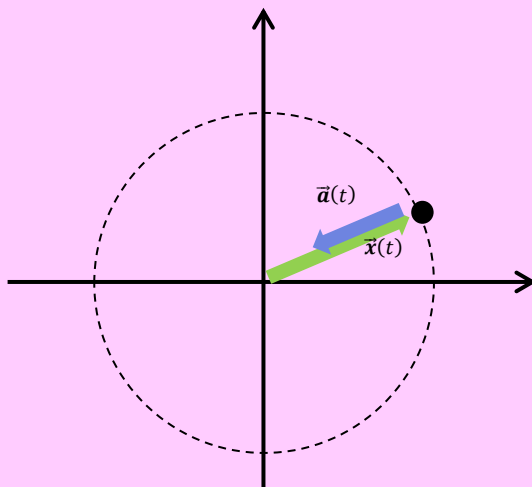
が成り立つ。

(注) このことは、物体が回転中心方向に向かって加速されていることを表している。

物体の質量を m として $k = m\omega^2$ とおくと、

$$m\vec{a}(t) = -k\vec{x}(t)$$

であるが、 $-k\vec{x}(t)$ は物体を中心方向に向かって引っ張る力であり、「向心力」と呼ばれる。(詳細は後述)



(3) 物体の質量を m として $k = m\omega^2$ とおく。

このとき、 $|\vec{x}(t)|$, $|\vec{v}(t)|$, $|\vec{a}(t)|$ を求めよ。

$$\begin{cases} |\vec{x}(t)| = |A(\cos(\omega t + \theta_0), \sin(\omega t + \theta_0))| = A \\ |\vec{v}(t)| = |\omega A(-\sin(\omega t + \theta_0), \cos(\omega t + \theta_0))| = |\omega|A \\ |\vec{a}(t)| = |-\omega^2 A(\cos(\omega t + \theta_0), \sin(\omega t + \theta_0))| = \omega^2 A \end{cases}$$

であり、 $k = m\omega^2$ より $|\omega| = \sqrt{\frac{k}{m}}$ であることに注意すると、

$$\begin{cases} |\vec{x}(t)| = |A(\cos(\omega t + \theta_0), \sin(\omega t + \theta_0))| = A \\ |\vec{v}(t)| = |\omega A(-\sin(\omega t + \theta_0), \cos(\omega t + \theta_0))| = \sqrt{\frac{k}{m}}A \\ |\vec{a}(t)| = |-\omega^2 A(\cos(\omega t + \theta_0), \sin(\omega t + \theta_0))| = \frac{k}{m}A \end{cases}$$

(4) $\vec{v}(t)$ の位相角を $\theta^{(v)}(t)$ 、 $\vec{x}(t)$ の位相角を $\theta^{(x)}(t)$ とすると、 $\theta^{(v)}(t) - \theta^{(x)}(t)$ を求めよ。

$\omega > 0$ のとき、

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \omega A(-\sin(\omega t + \theta_0), \cos(\omega t + \theta_0)) \\ &= \omega A\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega t + \theta_0\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} + \omega t + \theta_0\right)\right)\end{aligned}$$

であるから、

$$\theta^{(v)}(t) = \frac{\pi}{2} + \omega t + \theta_0$$

$\omega < 0$ のとき、

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \omega A(-\sin(\omega t + \theta_0), \cos(\omega t + \theta_0)) \\ &= (-\omega A)(\sin(\omega t + \theta_0), -\cos(\omega t + \theta_0)) \\ &= (-\omega A)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \omega t + \theta_0\right), \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \omega t + \theta_0\right)\right)\end{aligned}$$

であるから、

$$\theta^{(v)}(t) = -\frac{\pi}{2} + \omega t + \theta_0$$

一方、

$$\vec{x}(t) = A(\cos(\omega t + \theta_0), \sin(\omega t + \theta_0))$$

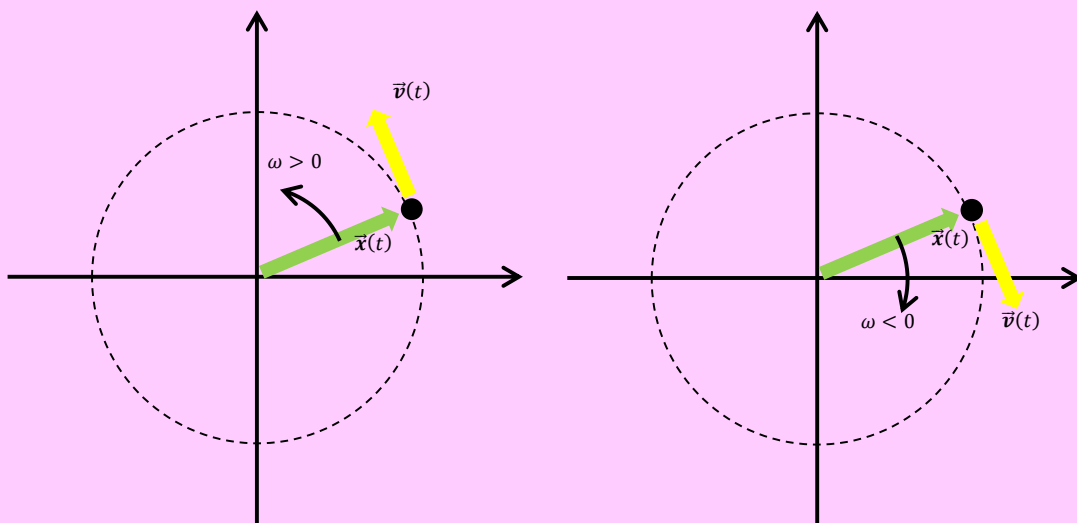
であるから、

$$\theta^{(x)}(t) = \omega t + \theta_0$$

以上より、

$$\theta^{(v)}(t) - \theta^{(x)}(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (\omega > 0) \\ -\frac{\pi}{2} & (\omega < 0) \end{cases}$$

(注) このことは、物体が円周方向に沿って、角速度の方向に向かって運動していることを表している。



(5) 原点を中心とした等速円運動を行う物体がある (角速度は正とする)。

$\vec{v}(0) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi, \frac{\pi}{12}\right)$ 、時刻 1 における $\vec{v}(t)$ の位相角が $\frac{11}{12}\pi$ のとき、 $\vec{a}(3)$ を求めよ。

$$\begin{cases} \vec{x}(t) = A(\cos(\omega t + \theta_0), \sin(\omega t + \theta_0)) \\ \vec{v}(t) = \omega A(-\sin(\omega t + \theta_0), \cos(\omega t + \theta_0)) \\ \vec{a}(t) = -\omega^2 A(\cos(\omega t + \theta_0), \sin(\omega t + \theta_0)) \end{cases}$$

とおくと、 $\vec{v}(0) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi, \frac{\pi}{12}\right)$ なので

$$\omega A(-\sin \theta_0, \cos \theta_0) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi, \frac{\pi}{12}\right) \quad \cdots \star_1$$

これより、 $\omega > 0$ に注意すると

$$\omega A = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi\right)^2 + \left(\frac{\pi}{12}\right)^2} = \frac{\pi}{6} \quad \cdots \star_2$$

が得られる。これを $\star_1$ に代入すると、

$$\frac{\pi}{6}(-\sin \theta_0, \cos \theta_0) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi, \frac{\pi}{12}\right)$$

であるので、

$$\begin{cases} \sin \theta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \theta_0 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{すなわち、} \theta_0 = \frac{\pi}{3} \quad \cdots \star_3$$

である。

一方 $\omega > 0$ に注意すると (4) より $\vec{v}(t)$ の位相角は $\frac{\pi}{2} + \omega t + \theta_0$ であり、時刻 1 における $\vec{v}(t)$ の位相角が $\frac{11}{12}\pi$ なので

$$\frac{\pi}{2} + \omega + \theta_0 = \frac{11}{12}\pi$$

$$\frac{\pi}{2} + \omega + \frac{\pi}{3} = \frac{11}{12}\pi$$

$$\omega = \frac{1}{12}\pi \quad \cdots \star_4$$

が得られ、 $\star_2$ 、 $\star_4$ より

$$A = 2 \quad \cdots \star_5$$

である。

$\star_3$ 、 $\star_4$ 、 $\star_5$ より

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= -\omega^2 A(\cos(\omega t + \theta_0), \sin(\omega t + \theta_0)) \\ &= -\left(\frac{1}{12}\pi\right)^2 \times 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{72}\pi^2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{3}\right)\right) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \vec{a}(3) &= -\frac{1}{72}\pi^2 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{72}\pi^2 \left(\cos\frac{7\pi}{12}, \sin\frac{7\pi}{12}\right) \\ &= -\frac{1}{72}\pi^2 \left(-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) \\ &= \pi^2 \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{288}, -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{288}\right) \end{aligned}$$

【解説3】 速度と速さ、変位と移動距離、軌跡と弧長

数学的定義

速度・・・物体の単位時間当たりの運動の大きさと方向を表すベクトルを「速度」と呼ぶ。

$$\vec{v}(t) = \left(\frac{dx^{(1)}(t)}{dt}, \frac{dx^{(2)}(t)}{dt}, \dots, \frac{dx^{(n)}(t)}{dt} \right)$$

数学的定義

速さ・・・速度の絶対値（速度の大きさ）を「速さ」と呼ぶ。「速さ」はスカラーである。

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{\left\{ \left(\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx^{(2)}(t)}{dt} \right)^2 + \dots + \left(\frac{dx^{(n)}(t)}{dt} \right)^2 \right\}}$$

▶ Video

数学的定義

変位・・・ある時刻における位置と、別の時刻における位置の間の直線距離を「変位」と呼ぶ。

$$\vec{x}(t_1) - \vec{x}(t_0) \quad (\text{変位の大きさ } |\vec{x}(t_1) - \vec{x}(t_0)|)$$

数学的定義

移動距離・・・ある時刻における位置と、別の時刻における位置の間の移動経路に沿った軌跡の長さを「移動距離」と呼ぶ。

▶ Video

$$\int_{t_0}^{t_1} |\vec{v}(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left\{ \left(\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx^{(2)}(t)}{dt} \right)^2 + \dots + \left(\frac{dx^{(n)}(t)}{dt} \right)^2 \right\}} dt$$

▶ Video

数学的定義

軌跡・・・物体の位置を追跡して得られる図形

$\vec{x}(t) = (x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(n)}(t))$ の媒介変数表示

$$\begin{cases} X^{(1)} = x^{(1)}(t) \\ X^{(2)} = x^{(2)}(t) \\ \vdots \\ X^{(n)} = x^{(n)}(t) \end{cases}$$

から t を消去した、 $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ の間に成立する関係式。

$\vec{x}(t)$ が描く、 $X^{(1)} X^{(2)} \dots X^{(n)}$ 空間上の図形と考えてもよい。

数学的定義

弧長 (例：2次元の場合)

▶ Video

弧長 (軌跡が $X^{(2)} = f(X^{(1)})$ で表されるとき)

$$L(x^{(1)}(t_0), x^{(1)}(t_1)) = \int_{x^{(1)}(t_0)}^{x^{(1)}(t_1)} \sqrt{1 + \left(\frac{dX^{(2)}}{dX^{(1)}}\right)^2} dX^{(1)}$$

移動距離

$$\int_{t_0}^{t_1} |\vec{v}(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx^{(1)}(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^{(2)}(t)}{dt}\right)^2} dt$$

数学定理

弧長と移動距離は同義である。

$$L(x^{(1)}(t_0), x^{(1)}(t_1)) = \int_{t_0}^{t_1} |\vec{v}(t)| dt$$

数学定理

(参考) 極座標表示された曲線の弧長は次の通り

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r(\theta)^2 + \left(\frac{dr(\theta)}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

【問題 10】 移動距離（1 次元運動）

$x(t) = t^3 - 9t^2 + 24t - 7$ のとき、時刻 1 から時刻 5 までの移動距離を求めよ。

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 3t^2 - 18t + 24 \quad \text{より、}$$

$$L = \int_1^5 |v(t)| dt$$

$$= \int_1^5 \sqrt{(3t^2 - 18t + 24)^2} dt$$

$$= 3 \int_1^5 |t^2 - 6t + 8| dt$$

$$t^2 - 6t + 8 = (t-2)(t-4) \begin{cases} \geq 0 & (t \leq 2) \\ \leq 0 & (2 \leq t \leq 4) \\ \geq 0 & (4 \leq t) \end{cases} \quad \text{であるので、}$$

$$L = 3 \left[\int_1^2 (t^2 - 6t + 8) dt - \int_2^4 (t^2 - 6t + 8) dt + \int_4^5 (t^2 - 6t + 8) dt \right]$$

$$= 3 \left[\left[\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t \right]_1^2 - \left[\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t \right]_2^4 + \left[\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t \right]_4^5 \right]$$

$$= 12$$

【問題 11】 移動距離（放物運動）

$\vec{a}(t) = (0, 1)$ 、 $\vec{v}(0) = (1, 0)$ 、 $\vec{x}(0) = (0, 0)$ で表わされる放物運動について、時刻 2 から時刻 3 までの移動距離を求めよ。
ただし次の積分公式を使用してよい。

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left\{ x\sqrt{1+x^2} + \log \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \right\} + C$$

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t) dt$$

$$= \int (0, 1) dt$$

$$= (C^{(1)}, t + C^{(2)}) \quad (C^{(1)}, C^{(2)} \text{は積分定数})$$

初期条件より $\vec{v}(0) = (C^{(1)}, C^{(2)}) = (1, 0)$ であることから、

$$\vec{v}(t) = (1, t)$$

したがって、

$$L = \int_2^3 |v(t)| dt$$

$$= \int_2^3 \sqrt{1+t^2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[t\sqrt{1+t^2} + \log(t + \sqrt{1+t^2}) \right]_2^3$$

$$= \frac{1}{2} \left[\{3\sqrt{1+9} + \log(3 + \sqrt{1+9})\} - \{2\sqrt{1+4} + \log(2 + \sqrt{1+4})\} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(3\sqrt{10} - 2\sqrt{5} + \log \frac{3+\sqrt{10}}{2+\sqrt{5}} \right)$$

【問題 12】 移動距離（等速円運動）

等速円運動 $\vec{x}(t) = A (\cos(\omega t + \theta_0), \sin(\omega t + \theta_0))$ (A, ω, θ_0 は定数、 $A > 0, \omega \neq 0$ とする) について、

- ① $|\vec{v}(t)|$ を A, ω, θ_0 を用いて表せ。
- ② 時刻 t_0 から時刻 t_1 までの移動距離 L を A, ω, θ_0 を用いて表せ。
- ③ L を、 $|\vec{v}(t)|$ を用いて表せ。
- ④ $t_1 - t_0 = \frac{2\pi}{|\omega|}$ のときの L の値を求めよ。

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \vec{v}(t) &= \frac{d}{dt} \vec{x}(t) \\ &= \frac{d}{dt} \{A (\cos(\omega t + \theta_0), \sin(\omega t + \theta_0))\} \\ &= \omega A (-\sin(\omega t + \theta_0), \cos(\omega t + \theta_0)) \end{aligned}$$

よって

$$|\vec{v}(t)| = |\omega|A$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} L &= \int_{t_0}^{t_1} |\vec{v}(t)| dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} |\omega|A dt \\ &= |\omega|A \int_{t_0}^{t_1} 1 dt \\ &= |\omega|A(t_1 - t_0) \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} L = |\omega|A(t_1 - t_0) = |\vec{v}(t)|(t_1 - t_0)$$

$$\textcircled{4} L = |\omega|A(t_1 - t_0) = |\omega|A \frac{2\pi}{|\omega|} = 2\pi A$$

【解説 4】 物体系、質量、運動量

無定義

質点

力学の考察の対象となる何らかの点を「質点」という。

「質点」は点であり、位置はあるが、大きさや質量は無い。

数学的定義

物体

質点の集合を物体と呼ぶ。

(注)「質点」と「物体」はしばしば混同して使用され、混同しても実用上はあまり大きな齟齬は発生しないことが多いが、概念としては区別して考えるべきである。

数学的定義

物体系

物体の集合、すなわち質点の集合の集合族が次の性質を持つとき、その集合族を

「物体系」と呼ぶ。

- ①空集合 $\emptyset$ は物体である。
- ② A が物体ならば、 A^c (A に所属しないすべての質点から成る集合) も物体である。
- ③ A, B がいずれも物体であるならば、 $A \cup B$ (A に所属するかまたは B に所属するすべての質点から成る集合) も物体である。

すなわち、物体系は加法族である。

(例) $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ が質点の全体集合であるとき、4個の物体から成る次の集合族
 $\{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\}$
 は、物体系である。

数学定理

全体集合 (すべての質点から成る集合) は、物体である。(これを全体物体と呼び、通常 U と記す。)

A, B がいずれも物体であるならば、 $A \cap B$ も物体である。

数学的定義

物体系の中の各々の物体に、その物体の質量を対応させる関数が次の性質を持つとき、その関数を「質量関数」と呼ぶ。

- ①空集合 $\emptyset$ の質量は0である。
- ② A, B がいずれも物体で、かつ $A \cap B = \emptyset$ ならば、 $A \cup B$ の質量は A の質量と B の質量の和と一致する。

すなわち、物体系の質量関数は、物体系における測度関数である。

(注) ここで使用している「質量関数」は一般的な用語ではない。ここでは「特定の物体の質量」と「すべての物体ごとに定まる質量の体系」を区別するために、前者を「質量」後者を「質量関数」と呼ぶこととした。

(注) 質量はスカラー量である。

(注) 質量は時間経過に伴って変化しないものとする。つまり、すべての物体について、それらの質量はどの時刻においても同じとする。

(例) 物体系 $\{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\}$ に対し、たとえば次の関数は物体系における質量関数である。

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{[\emptyset]} = 0 \\ m_{[\{\alpha\}]} = 3M \\ m_{[\{\alpha, \beta\}]} = 7M \\ m_{[\{\alpha, \beta, \gamma\}]} = 10M \end{array} \right.$$

(記法) 上記(例)では、物体 A の質量を、 $m_{[A]}$ と記している。

以下、同様の記法を使用する。

数学的定義

物体系の中の各々の物体に、その物体の運動量を対応させる関数が次の性質を持つとき、その関数を「運動量関数」と呼ぶ。

①空集合 $\emptyset$ の運動量は 0 である。

② A, B がいずれも物体で、かつ $A \cap B = \emptyset$ ならば、 $A \cup B$ の運動量は A の運動量と B の運動量の和と一致する。

すなわち、物体系の運動量関数は、物体系における測度関数である。

(注) ここで使用している「運動量関数」は一般的な用語ではない。ここでは「特定の物体の運動量」と「すべての物体ごとに定まる運動量の体系」を区別するために、前者を「運動量」後者を「運動量関数」と呼ぶこととした。

(注) 運動量はベクトルであるが、上記は「各成分ごとに①、②の性質が成り立つ。」ということを主張している。つまり運動量関数は、ベクトル関数として測度の性質を満たす。

(注) 運動量は時間経過に伴って変化する。たとえば、時刻 1 のときの運動量も、時刻 2 のときの運動量もおおの測度であるが、両者は異なった測度である。

(例) 物体系 $\{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\}$ に対し、たとえば次の関数は物体系における運動量関数である。

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{[\emptyset]}(t) = 0 \\ p_{[\{\alpha\}]}(t) = t^2 \\ p_{[\{\beta, \gamma\}]}(t) = 2t \\ p_{[\{\alpha, \beta, \gamma\}]}(t) = t^2 + 2t \end{array} \right.$$

(記法) 上記(例)では、時刻 t における物体 A の運動量を $\vec{p}_{[A]}(t)$ 、(1次元においては $p_{[A]}(t)$) と記している。

以下、同様の記法を使用する。

数学定理

n 個の物体 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ があり、その中のどの 2 個を選んでもその共通部分が $\emptyset$ であるとする。このとき、

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_n$ の質量は、 A_1 の質量+ A_2 の質量+ $\dots$ + A_n の質量 と等しい。

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_n$ の運動量は、 A_1 の運動量+ A_2 の運動量+ $\dots$ + A_n の運動量 と等しい。

【問題 13】 物体系の性質

(1) $U=\{a,b,c,d\}$ を質点の全体集合とすると、次の集合族が物体系であるか否か判定せよ。

$\{\{a,b\},\{c,d\}\}$

$\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$

$\{\emptyset,\{b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$

$\{\emptyset,\{a,b\},\{c,d\},\{a,b,c,d\}\}$

$\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

$\{\emptyset,\{a\},\{c\},\{a,c\},\{b,d\},\{a,b,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$

$\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}\}$

$\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$

$\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$

$\{\{a,b\},\{c,d\}\}$

物体系ではない。($\emptyset$ を要素に持たない。)

$\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$

物体系ではない。($\emptyset$ を要素に持たない。)

$\{\emptyset,\{b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$

物体系である。

$\{\emptyset,\{a,b\},\{c,d\},\{a,b,c,d\}\}$

物体系である。

$\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

物体系ではない。(全体集合を要素に持たない。)

$\{\emptyset,\{a\},\{c\},\{a,c\},\{b,d\},\{a,b,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$

物体系である。

$\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}\}$

物体系ではない。($\emptyset^c$ すなわち全体集合を要素に持たない。)

$\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$

物体系ではない。($\emptyset$ を要素に持たない。)

$\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$

物体系である。

(2) 加法族の性質に基づき、全体集合 U は物体であることを証明せよ。

空集合 $\emptyset$ は物体であるので、 $\emptyset^c$ は物体である。

$\emptyset^c = U$ であるので、 U は物体である。

(3) 加法族の性質に基づき、 $\{a,b\}$ 、 $\{b,c\}$ がともに物体であるとき、 $\{b\}$ が物体であることを証明せよ。

$\{a,b\}$ 、 $\{b,c\}$ がいずれも物体なので、 $\{a,b\}^c$ 、 $\{b,c\}^c$ はいずれも物体である。

$\{a,b\}^c$ 、 $\{b,c\}^c$ がいずれも物体なので、 $\{a,b\}^c \cup \{b,c\}^c$ は物体である。

$\{a,b\}^c \cup \{b,c\}^c$ が物体なので、 $(\{a,b\}^c \cup \{b,c\}^c)^c$ は物体である。

$(\{a,b\}^c \cup \{b,c\}^c)^c = (\{a,b\}^c)^c \cap (\{b,c\}^c)^c = \{a,b\} \cap \{b,c\}$ なので、 $\{a,b\} \cap \{b,c\}$ すなわち $\{b\}$ は物体である。

【問題 14】 質量関数、運動量関数の性質

(1) 航空機に 100 人の乗客が搭乗しており、ちょうど満席であるとする。
このとき、質量関数、運動量関数の定義に基づき、次のことを証明せよ。

①機体の前半分または左半分に搭乗している 75 人の乗客の集まりの質量は、機体の前半分の 50 人の乗客の集まりの質量と、機体の左半分の 50 人の乗客の集まりの質量の和から、機体の前半分かつ左半分に搭乗している 25 人の乗客の集まりの質量を引いた値である。

②機体の前半分または左半分に搭乗している 75 人の乗客の集まりの運動量は、機体の前半分の 50 人の乗客の集まりの運動量と、機体の左半分の 50 人の乗客の集まりの運動量の和から、機体の前半分かつ左半分に搭乗している 25 人の乗客の集まりの運動量を引いた値である。

機体の前半分に搭乗している 50 人の乗客の集まりを、物体 A とする。

機体の左半分に搭乗している 50 人の乗客の集まりを、物体 B とする。

このとき、

機体の前半分または左半分に搭乗している 75 人の乗客の集まりは、物体 $A \cup B$

機体の前半分かつ左半分に搭乗している 25 人の乗客の集まりは、物体 $A \cap B$

である。

$A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$ であって、 A と $(A^c \cap B)$ には共通部分がないので、

$$m_{[A \cup B]} = m_{[A]} + m_{[A^c \cap B]} \quad \cdots \star_1$$

また、 $B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B)$ であって、 $(A^c \cap B)$ と $(A \cap B)$ には共通部分がないので、

$$m_{[B]} = m_{[A^c \cap B]} + m_{[A \cap B]} \quad \text{よって} \quad m_{[A^c \cap B]} = m_{[B]} - m_{[A \cap B]} \quad \cdots \star_2$$

$\star_2$ を $\star_1$ に代入すると

$$m_{[A \cup B]} = m_{[A]} + m_{[B]} - m_{[A \cap B]}$$

したがって、機体の前半分または左半分に搭乗している 75 人の乗客の集まりの質量は、機体の前半分の 50 人の乗客の集まりの質量と、機体の左半分の 50 人の乗客の集まりの質量の和から、機体の前半分かつ左半分に搭乗している 25 人の乗客の集まりの質量を引いた値である。

運動量関数についても同様である。

(2) 次を証明せよ。

$$\textcircled{1} (\bigcup_{i=1}^n A_i) \cap A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1})$$

数学的帰納法を用いて証明する。

$n = 1$ のとき、

$$(\text{左辺}) = (\bigcup_{i=1}^1 A_i) \cap A_{1+1} = A_1 \cap A_2$$

$$(\text{右辺}) = \bigcup_{i=1}^1 (A_i \cap A_{1+1}) = A_1 \cap A_2$$

よって (左辺) = (右辺) であり、題意は成立する。

$n = k$ のとき成立すると仮定する。すなわち、

$$(\bigcup_{i=1}^k A_i) \cap A_{k+1} = \bigcup_{i=1}^k (A_i \cap A_{k+1})$$

と仮定する。

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= (\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i) \cap A_{(k+1)+1} \\ &= (\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i) \cap A_{k+2} \\ &= \{(\bigcup_{i=1}^k A_i) \cup A_{k+1}\} \cap A_{k+2} \\ &= \{(\bigcup_{i=1}^k A_i) \cap A_{k+2}\} \cup \{A_{k+1} \cap A_{k+2}\} \end{aligned}$$

ここで、仮定 $(\bigcup_{i=1}^k A_i) \cap A_{k+1} = \bigcup_{i=1}^k (A_i \cap A_{k+1})$ を、 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k, A_{k+2}$ なる列に適用すると

$$(\bigcup_{i=1}^k A_i) \cap A_{k+2} = \bigcup_{i=1}^k (A_i \cap A_{k+2})$$

であるので、

$$(\text{左辺}) = \bigcup_{i=1}^k (A_i \cap A_{k+2}) \cup \{A_{k+1} \cap A_{k+2}\} = \bigcup_{i=1}^{k+1} (A_i \cap A_{k+2})$$

であり、これは $n = k + 1$ のときの (右辺) と一致しており、したがって $n = k + 1$ のとき題意は成立する。

以上より、任意の自然数 n について、題意が成立する。

② $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ のどの 2 個を選んでもその共通部分は $\emptyset$ であるとする。このとき、

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap A_{n+1} = \emptyset$$

が成立する。

①より $\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1})$ であり、仮定より $A_i \cap A_{n+1} = \emptyset$ であるから、

$$\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1}) = \bigcup_{i=1}^n \emptyset = \emptyset$$

③ $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ のどの 2 個を選んでもその共通部分は $\emptyset$ であるとする。

このとき、次の 2 式が成り立つ。

$$m\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] = \sum_{i=1}^n m_{[A_i]} \quad , \quad \vec{p}\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right](t) = \sum_{i=1}^n \vec{p}_{[A_i]}(t)$$

数学的帰納法を用いて証明する。

$n = 1$ のとき、

$$(\text{左辺}) = m\left[\bigcup_{i=1}^1 A_i\right] = m_{[A_1]}$$

$$(\text{右辺}) = \sum_{i=1}^1 m_{[A_i]} = m_{[A_1]}$$

よって題意は成立する。

$n = k$ のとき成立すると仮定する。すなわち、 $m\left[\bigcup_{i=1}^k A_i\right] = \sum_{i=1}^k m_{[A_i]}$ と仮定する。

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= m\left[\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right] \\ &= m\left[\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \cup A_{k+1}\right] \\ &= m\left[\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \cup A_{k+1}\right] \\ &= m\left[\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \cup A_{k+1}\right] \end{aligned}$$

②より $\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right)$ と A_{k+1} には共通部分がないので、

$$(\text{左辺}) = m\left[\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \cup A_{k+1}\right] = m\left[\bigcup_{i=1}^k A_i\right] + m_{[A_{k+1}]}$$

また、仮定より $m\left[\bigcup_{i=1}^k A_i\right] = \sum_{i=1}^k m_{[A_i]}$ であるので、

$$(\text{左辺}) = \sum_{i=1}^k m_{[A_i]} + m_{[A_{k+1}]} = \sum_{i=1}^{k+1} m_{[A_i]} = (\text{右辺})$$

以上より、任意の自然数 n について、題意が成立する。

$$\vec{p}\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right](t) = \sum_{i=1}^n \vec{p}_{[A_i]}(t) \quad \text{についても同様である。}$$

【解説 5】 質点位置と物体位置（重心）、 平均運動量

無定義

質点位置

質点には位置があり、これを質点位置ということとする。

（注）質点位置は時刻ごとに定まる。また、質点位置はベクトルである。

（記法）時刻 t における質点 p の位置を

$$\vec{x}_{[p]}(t)$$

と記すことにする。

（注）ここでは、質点位置と物体位置（後述）と区別する観点から、質点位置にはドットをつけて $\vec{x}$ と記すこととした。（一般に通用している記法ではない。）

数学的定義

質点速度、質点加速度

質点速度や質点加速度を次のように定義する。

（質点速度）

$$\frac{d\vec{x}_{[p]}(t)}{dt} = \vec{v}_{[p]}(t)$$

（質点加速度）

$$\frac{d^2\vec{x}_{[p]}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}_{[p]}(t)}{dt} = \vec{a}_{[p]}(t)$$

数学的定義

物体位置（重心）

質点位置の、質量による加重平均位置を、物体位置（あるいは物体の重心）という。

すなわち、物体 A の時刻 t における物体位置を

$$\vec{x}_{[A]}(t) = \frac{\int_{p \in A} \vec{x}_{[p]}(t) dm_{[p]}}{m_{[A]}} \quad (m \text{ は質量測度})$$

とする。

ただし、物体の質量（ $m_{[A]} = \int_{p \in A} dm$ ）が 0 の場合（例えば物体 $\emptyset$ など）は、物体位置は便宜的に $\vec{0}$ として取り扱う。

（注）物体位置は時刻ごとに定まる。また、物体位置はベクトルである。

（記法）どの物体の物体位置を指しているか明らかな場合には、 $[A]$ を省略して単に $\vec{x}(t)$ と記す場合がある。（物体速度、物体加速度において同様。）

（注）物体の「位置」との関係

ここでいう「物体位置」は、以前に無定義用語として導入した、物体の「位置」と同義である。つまり、物体の「位置」は、もとをただせば「質点位置」の重心である。

数学定理

1次元の物体系において、物体 $[-\infty, \alpha]$ の質量が、 $m_{[\alpha]} = \int_{-\infty}^{\alpha} \rho(\dot{x}) d\dot{x}$ で与えられるとき、物

体 $[\alpha, \beta]$ の物体位置は

$$x_{[[\alpha, \beta]]}(t) = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \dot{x} \rho(\dot{x}) d\dot{x}}{\int_{\alpha}^{\beta} \rho(\dot{x}) d\dot{x}}$$

である。

（注：このような $\rho(\dot{x})$ を体積密度関数という。）

数学定理

3 次元の物体 A において、体積密度が一定であり、物体を x 軸に垂直な平面で切断したときの断面積が $S(x)$ で与えられるとする。このとき、この物体の物体位置の x 成分は、

$$x_{[A]}(t) = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} xS(x) dx}{\int_{\alpha}^{\beta} S(x) dx}$$

である。 (α, β) は物体の x 軸方向の範囲

数学的定義

物体速度、物体加速度

物体位置の時間微分を物体速度といい、物体速度の時間微分（物体位置の時間 2 階微分）を物体加速度という。

数学定理

質点速度および質点加速度と、物体速度および物体加速度の関係

質点速度の質量による加重平均値は、物体速度と一致する。

同様に、質点加速度の質量による加重平均値は、物体加速度と一致する。

【問題 15】 平均の計算（連続分布の場合）

ある学校で、 F 点満点の数学のテストを行った。（すなわち、得点の範囲は 0 点以上 F 以下である。）

得点ごとにその得点を取った人の人数を表す関数を $\rho(x)$ とし、 α 点以上 β 未満の人の人数が

$$\int_{\alpha}^{\beta} \rho(x) dx \quad (\text{人}) \quad \text{であるとする。}$$

このとき、

(1) このテストを受けた人の合計人数を求めよ。

合計人数は 0 点以上 F 以下の人の人数であるから、

$$\int_0^F \rho(x) dx \quad (\text{人})$$

である。

(2) 区分求積法を用いて、このテストを受けた人全員の合計点数 (S とする。) を求めよ。

$0 \leq k \leq n-1$ なる自然数 k について、 $\left(\frac{k}{n}\right)F$ 点以上 $\left(\frac{k+1}{n}\right)F$ 以下の人数は

$$\int_{\left(\frac{k}{n}\right)F}^{\left(\frac{k+1}{n}\right)F} \rho(x) dx \doteq \left\{ \left(\frac{k+1}{n}\right)F - \left(\frac{k}{n}\right)F \right\} \rho\left(\left(\frac{k}{n}\right)F\right) = \frac{F}{n} \rho\left(\left(\frac{k}{n}\right)F\right) \quad (\text{人})$$

であり、これらの人の合計点数は、およそ

$$\left\{ \left(\frac{k}{n}\right)F \right\} \times \left\{ \frac{F}{n} \rho\left(\left(\frac{k}{n}\right)F\right) \right\} \quad (\text{点})$$

である。したがって、テストを受けた人全員の合計点数は、

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[\left\{ \left(\frac{k}{n}\right)F \right\} \times \left\{ \frac{F}{n} \rho\left(\left(\frac{k}{n}\right)F\right) \right\} \right] = \frac{F^2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \left(\frac{k}{n}\right) \times \rho\left(\left(\frac{k}{n}\right)F\right) \right\}$$

であり、これの $n \rightarrow \infty$ のときの極限が S であるので、

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{F^2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \left(\frac{k}{n}\right) \times \rho\left(\left(\frac{k}{n}\right)F\right) \right\} \right] = F^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \left(\frac{k}{n}\right) \times \rho\left(\left(\frac{k}{n}\right)F\right) \right\} \right] = F^2 \int_0^1 \theta \rho(\theta F) d\theta$$

ここで、 $\theta F = x$ と置換すると、 $d\theta = \frac{1}{F} d\theta$ 、 $x: 0 \rightarrow F$ であるので、

$$S = F^2 \int_0^{\frac{x}{F}} \rho(x) \frac{1}{F} d\theta = \int_0^F x \rho(x) dx$$

が得られる。

(3) このテストの平均点数 (μ とする。) を求めよ。

平均点数 = 合計点数 ÷ 人数なので、(1)、(2) より、

$$\mu = \frac{\int_0^F x \rho(x) dx}{\int_0^F \rho(x) dx}$$

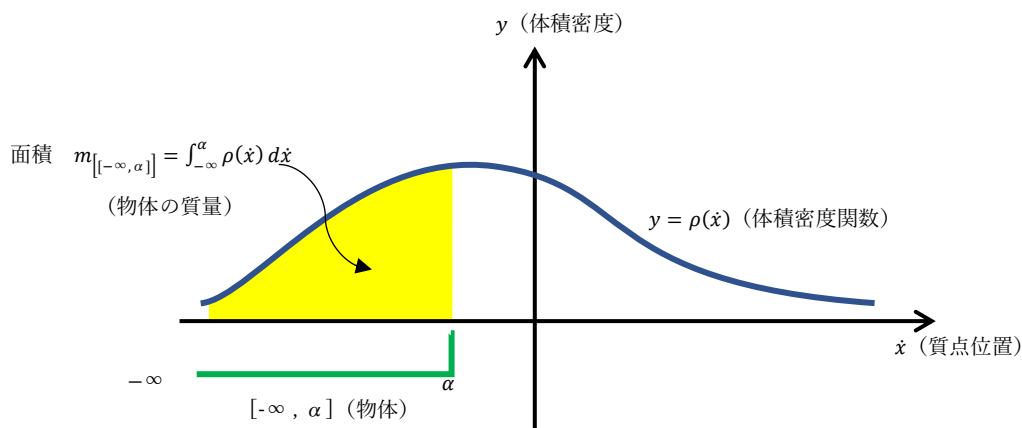
(4) $F = 10$ 、 $\rho(x) = -x^3 + 10x^2$ のとき、このテストの平均点数を求めよ。

$$\mu = \frac{\int_0^{10} x(-x^3 + 10x^2) dx}{\int_0^{10} (-x^3 + 10x^2) dx} = \frac{\left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{10}{4}x^4\right]_0^{10}}{\left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{10}{3}x^3\right]_0^{10}} = 6 \quad (\text{点})$$

【問題 16】 物体位置（重心）と体積密度

$\dot{x}$ 軸上に、実数全体の集合を質点の全体集合とする 1 次元の物体系において、物体 $[-\infty, \alpha]$ の質量が、 $m_{[-\infty, \alpha]} = \int_{-\infty}^{\alpha} \rho(\dot{x}) d\dot{x}$ で与えられるとする。

（注：質点が運動することにより、体積密度関数 $\rho(\dot{x})$ も変化することになるのだが、以下では、ある時刻 t を固定して考えることとする。）



このとき、次のことを示せ。

① $\alpha < \beta$ とするとき、質量関数の定義に基づき、物体 $[\alpha, \beta]$ の質量が、 $\int_{\alpha}^{\beta} \rho(\dot{x}) d\dot{x}$ であることを証明せよ。

$[-\infty, \beta] = [-\infty, \alpha] \cup [\alpha, \beta]$ で、かつ $[-\infty, \alpha] \cap [\alpha, \beta] = \emptyset$ であるので、質量関数の定義に基づき、

$$m_{[-\infty, \beta]} = m_{[-\infty, \alpha] \cup [\alpha, \beta]} = m_{[-\infty, \alpha]} + m_{[\alpha, \beta]}$$

したがって、

$$\begin{aligned} m_{[\alpha, \beta]} &= m_{[-\infty, \beta]} - m_{[-\infty, \alpha]} \\ &= \int_{-\infty}^{\beta} \rho(\dot{x}) d\dot{x} - \int_{-\infty}^{\alpha} \rho(\dot{x}) d\dot{x} \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\dot{x}) d\dot{x} \end{aligned}$$

②物体 $[\alpha, \beta]$ の物体位置 $x_{[[\alpha, \beta]]}(t)$ を求めよ。

物体位置の定義に基づき、

$$x_{[[\alpha, \beta]]}(t) = \frac{\int_{p \in [\alpha, \beta]} x_{[p]}(t) dm_{[p]}}{m_{[[\alpha, \beta]]}}$$

ここで、 $m_{[p]} = \int \rho(\dot{x}) d\dot{x}_{[p]}(t)$ なので $dm_{[p]} = \rho d\dot{x}_{[p]}(t)$ 、

また $p \in [\alpha, \beta]$ のとき $\alpha \leq \dot{x} \leq \beta$ であるから、

$$x_{[[\alpha, \beta]]}(t) = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} x_{[p]}(t) \rho(\dot{x}) d\dot{x}_{[p]}(t)}{\int_{\alpha}^{\beta} \rho(\dot{x}) d\dot{x}_{[p]}(t)}$$

簡単のため、 $\dot{x}_{[p]}(t)$ を単に $\dot{x}$ と記せば、

$$x_{[[\alpha, \beta]]}(t) = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \dot{x} \rho(\dot{x}) d\dot{x}}{\int_{\alpha}^{\beta} \rho(\dot{x}) d\dot{x}}$$

③ $\rho(\dot{x}) = (2\dot{x}^2 + 3)$ のとき、物体 $[2, 3]$ の物体位置（すなわち重心）を求めよ。

$$\begin{aligned} x_{[[2, 3]]}(t) &= \frac{\int_2^3 \dot{x} \rho(\dot{x}) d\dot{x}}{\int_2^3 \rho(\dot{x}) d\dot{x}} \\ &= \frac{\int_2^3 \dot{x} (2\dot{x}^2 + 3) d\dot{x}}{\int_2^3 (2\dot{x}^2 + 3) d\dot{x}} \\ &= \frac{\left[\frac{2}{4} \dot{x}^4 + \frac{3}{2} \dot{x}^2 \right]_2^3}{\left[\frac{2}{3} \dot{x}^3 + 3\dot{x} \right]_2^3} \\ &= \frac{120}{47} \end{aligned}$$

【問題 17】 物体と物体の重心

①A, B が物体で、 $A \cap B = \emptyset$ とする。このとき、

$$\vec{x}_{[A \cup B]}(t) = \frac{m_{[A]}\vec{x}_{[A]}(t) + m_{[B]}\vec{x}_{[B]}(t)}{m_{[A]} + m_{[B]}}$$

が成り立つことを証明せよ。

物体位置の定義に基づき、 $\vec{x}_{[A \cup B]}(t) = \frac{\int_{p \in A \cup B} \vec{x}_{[p]}(t) dm_{[p]}}{m_{[A \cup B]}}$ である。

また仮定より $A \cap B = \emptyset$ であるから、

$$\int_{p \in A \cup B} \vec{x}_{[p]}(t) dm_{[p]} = \int_{p \in A} \vec{x}_{[p]}(t) dm_{[p]} + \int_{p \in B} \vec{x}_{[p]}(t) dm_{[p]}$$

$$m_{[A \cup B]} = m_{[A]} + m_{[B]}$$

が成り立つ。

したがって、

$$\begin{aligned} \vec{x}_{[A \cup B]}(t) &= \frac{\int_{p \in A} \vec{x}_{[p]}(t) dm_{[p]} + \int_{p \in B} \vec{x}_{[p]}(t) dm_{[p]}}{m_{[A]} + m_{[B]}} \\ &= \frac{m_{[A]} \times \frac{\int_{p \in A} \vec{x}_{[p]}(t) dm_{[p]}}{m_{[A]}} + m_{[B]} \times \frac{\int_{p \in B} \vec{x}_{[p]}(t) dm_{[p]}}{m_{[B]}}}{m_{[A]} + m_{[B]}} \\ &= \frac{m_{[A]}\vec{x}_{[A]}(t) + m_{[B]}\vec{x}_{[B]}(t)}{m_{[A]} + m_{[B]}} \end{aligned}$$

が成り立つ。

② n 個の物体 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ の中のどの 2 個を選んでもその共通部分は $\emptyset$ であるとする。このとき、

$$\vec{x}_{[\bigcup_{k=1}^n A_k]}(t) = \frac{\sum_{k=1}^n \{m_{[A_k]} \vec{x}_{[A_k]}(t)\}}{\sum_{k=1}^n m_{[A_k]}}$$

が成り立つことを証明せよ。

物体位置の定義に基づき、 $\vec{x}_{[\bigcup_{k=1}^n A_k]}(t) = \frac{\int_{p \in \bigcup_{k=1}^n A_k} \vec{x}_{[p]}(t) dm_{[p]}}{m_{[\bigcup_{k=1}^n A_k]}}$ である。

また仮定より $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ の中のどの 2 個を選んでもその共通部分は $\emptyset$ $A \cap B = \emptyset$ であるから、

$$\int_{p \in \bigcup_{k=1}^n A_k} \vec{x}_{[p]}(t) dm_{[p]} = \sum_{k=1}^n \int_{p \in A_k} \vec{x}_{[p]}(t) dm_{[p]}$$

$$m_{[\bigcup_{k=1}^n A_k]} = \sum_{k=1}^n m_{[A_k]} \quad (\because \text{【問題 14】より})$$

が成り立つ。

したがって、

$$\begin{aligned} \vec{x}_{[A \cup B]}(t) &= \frac{\sum_{k=1}^n \int_{p \in A_k} \vec{x}_{[p]}(t) dm_{[p]}}{\sum_{k=1}^n m_{[A_k]}} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n \left\{ m_{[A_k]} \frac{\int_{p \in A_k} \vec{x}_{[p]}(t) dm_{[p]}}{m_{[A_k]}} \right\}}{\sum_{k=1}^n m_{[A_k]}} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n \{m_{[A_k]} \vec{x}_{[A_k]}(t)\}}{\sum_{k=1}^n m_{[A_k]}} \end{aligned}$$

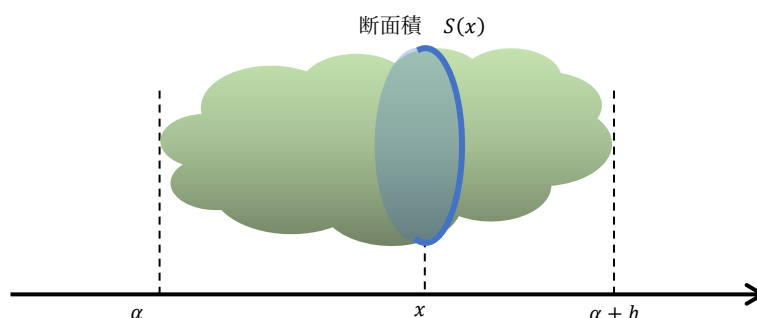
が成り立つ。

【問題 18】 物体位置（重心）の計算

xyz 空間上に物体 A があり、物体 A の x 座標の範囲は $\alpha \leq x \leq \alpha + h$ であるとする。

物体 A の体積密度を ρ とする。（ ρ は定数）

物体 A を x 座標の値が x となる平面で切断した切断面の面積を $S(x)$ とする。（ $S(x)$ は連続関数）



① n を非負の整数、 k を $0 \leq k \leq n-1$ の整数とする。

このとき、物体 n のうち $\alpha + \left(\frac{k}{n}\right)h \leq x \leq \alpha + \left(\frac{k+1}{n}\right)h$ の範囲の質量を求めよ。

ただし当該範囲の物体を、底面積が $S\left(\alpha + \left(\frac{k}{n}\right)h\right)$ で高さが $\left(\frac{1}{n}\right)h$ の柱であると見做してよい。

以下、当該柱を「物体 $\tilde{A}_k$ 」とよぶ。

円柱の体積

$$S\left(\alpha + \left(\frac{k}{n}\right)h\right) \times \left(\frac{1}{n}\right)h$$

に体積密度 ρ を乗じて

$$S\left(\alpha + \left(\frac{k}{n}\right)h\right) \times \left(\frac{1}{n}\right)h \times \rho = \frac{h\rho}{n} S\left(\alpha + \left(\frac{k}{n}\right)h\right)$$

が求める質量である。

②上記①の物体 $\tilde{A}_k$ の質量を用いて、 n 個の物体 $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_{n-1}$ の x 軸方向の重心位置を求めよ。

ただし、物体 $\tilde{A}_k$ の x 軸方向の重心位置を $\alpha + \left(\frac{k}{n}\right)h$ と見做してよい。

【問題 17】より、重心位置は

$$\bar{x}_{\left[\bigcup_{k=0}^{n-1} \tilde{A}_k\right]}(t) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \left[\left\{ \alpha + \left(\frac{k}{n}\right)h \right\} \left\{ \frac{h\rho}{n} S\left(\alpha + \left(\frac{k}{n}\right)h\right) \right\} \right]}{\sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{h\rho}{n} S\left(\alpha + \left(\frac{k}{n}\right)h\right) \right\}} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \left[\left\{ \alpha + \left(\frac{k}{n}\right)h \right\} S\left(\alpha + \left(\frac{k}{n}\right)h\right) \right]}{\sum_{k=0}^{n-1} S\left(\alpha + \left(\frac{k}{n}\right)h\right)}$$

である。

③上記②の重心位置について、その $n \rightarrow \infty$ における極限值を求めよ。ただし、物体Aの体積を V として表記せよ。

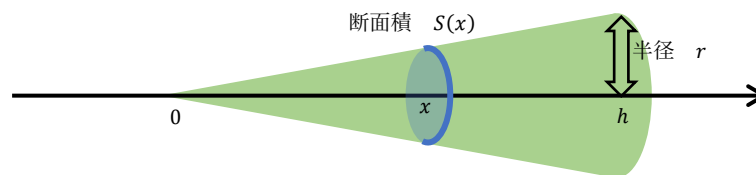
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_{[\cup_{k=0}^{n-1} \tilde{A}_k]}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\alpha + \left(\frac{k}{n} \right) h \right) s \left(\alpha + \left(\frac{k}{n} \right) h \right) \right]}{\sum_{k=0}^{n-1} s \left(\alpha + \left(\frac{k}{n} \right) h \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\alpha + \left(\frac{k}{n} \right) h \right) s \left(\alpha + \left(\frac{k}{n} \right) h \right) \right]}{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s \left(\alpha + \left(\frac{k}{n} \right) h \right)} \\ &= \frac{\int_0^1 (\alpha + \theta h) s(\alpha + \theta h) d\theta}{\int_0^1 s(\alpha + \theta h) d\theta} \\ &= \frac{\int_{\alpha}^{\alpha+h} x s(x) dx}{\int_{\alpha}^{\alpha+h} s(x) dx} \\ &= \frac{\int_{\alpha}^{\alpha+h} x s(x) dx}{V} \end{aligned}$$

【問題 19】 物体位置（重心）の計算（具体例）

次の物体の重心位置はどこか。

ただし物体の体積密度は一定とする。

①底面の半径が r 、高さが h の円錐



断面積は

$$S(x) = \pi r^2 \times \left(\frac{x}{h}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{h^2} x^2$$

体積は

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

であるので、物体位置の x 成分は、

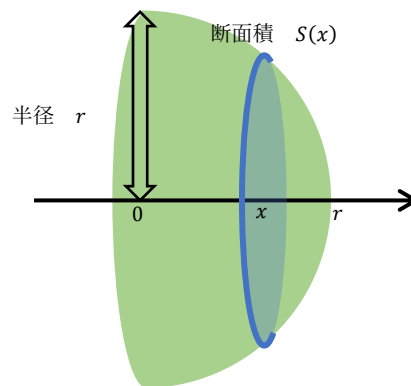
$$\begin{aligned} \frac{\int_0^h x S(x) dx}{V} &= \frac{\int_0^h x \times \frac{\pi r^2}{h^2} x^2 dx}{\frac{1}{3} \pi r^2 h} \\ &= \frac{3}{h^3} \int_0^h x^3 dx \\ &= \frac{3}{h^3} \left(\frac{1}{4} h^4 \right) \\ &= \frac{3}{4} h \end{aligned}$$

である。

また、物体の形状の対称性から、物体位置の y 成分および z 成分は0である。

すなわち物体位置は、中心軸上の、頂点と底面を3:1に内分する点である。

②半径 r の半球



断面積は

$$S(x) = \pi (\sqrt{r^2 - x^2})^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

体積は

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \div 2 = \frac{2}{3} \pi r^3$$

であるので、物体位置の x 成分は、

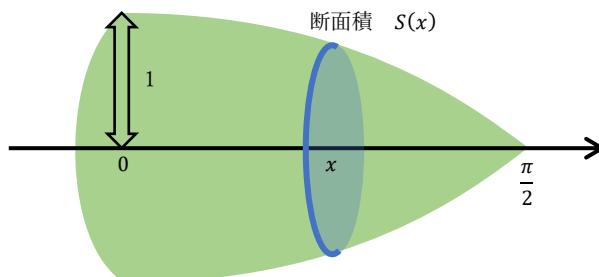
$$\begin{aligned} \frac{\int_0^r x S(x) dx}{V} &= \frac{\int_0^r x \times \pi(r^2 - x^2) dx}{\frac{2}{3} \pi r^3} \\ &= \frac{3}{2 r^3} \int_0^r (r^2 x - x^3) dx \\ &= \frac{3}{2 r^3} \left\{ r^2 \left(\frac{1}{2} r^2 \right) - \left(\frac{1}{4} r^4 \right) \right\} \\ &= \frac{3}{2 r^3} \left(\frac{1}{4} r^4 \right) \\ &= \frac{3}{8} r \end{aligned}$$

である。

また、物体の形状の対称性から、物体位置の y 成分および z 成分は0である。

すなわち物体位置は、中心軸上の、球の中心と表面を3:5に内分する点である。

③ $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$)、 x 軸、 y 軸で囲まれた領域を、 x 軸を中心に回転させた回転体



断面積は

$$S(x) = \pi \cos^2 x$$

体積は

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \cos^2 x \, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\pi}{2} - 0 + 0 - 0 \right] = \frac{\pi^2}{4}$$

であるので、物体位置の x 成分は、

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x S(x) \, dx}{V} &= \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \times \pi \cos^2 x \, dx}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x \, dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + x \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, dx + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x \, dx \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)' \, dx = \frac{1}{2} [x \sin 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} [0 - 0] - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + \frac{1}{4} [(-1) - (+1)] \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

であるので、

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x S(x) \, dx}{V} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi}$$

である。

また、物体の形状の対称性から、物体位置の y 成分および z 成分は0である。

すなわち物体位置は、 $(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi}, 0, 0)$ である。

【解説 6】 物体系の直和分割、N 質点系

質点の全体集合を N 個の物体に分割し、それらの物体をあらためて質点に置き換えて、あらたな物体系を構成することが可能である。

そのようにしてあらたに構成された物体系を、 N 質点系と呼ぶ。

直和分割

集合 U の部分集合の族が次の性質を持つとき、その集合族を U の直和分割という。

- ①その集合族は空集合を要素に持たない。
- ②その集合族のすべての元の和集合は U と等しい。
- ③その集合族の任意の 2 つの異なる元の共通部分は空集合である。

N 質点系

質点の全体集合を U とする物体系があり、 N 個の物体からなる物体の集合 $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ が、 U の直和分割であるとする。

このとき、あらたに次のような系を構成する。

- ①質点の全体集合 $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$
- ②物体系 $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ のすべての部分集合から成る集合
- ③質点位置 質点 $A_k (1 \leq k \leq N)$ の質点位置を、元の物体系における A_k の物体位置とする。
- ④質量関数 物体 $\{A_k\} (1 \leq k \leq N)$ の質量を、元の物体系における A_k の質量とする。
- ⑤運動量関数 物体 $\{A_k\} (1 \leq k \leq N)$ の運動量を、元の物体系における A_k の運動量とする。

このようにして構成されたあらたな物体系を、 $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ を基にした N 質点系と呼ぶ。

(注) 結局のところ、 N 質点系とは「 N 個の質点から成り、そのすべての部分集合を物体とするような物体系」に他ならない。

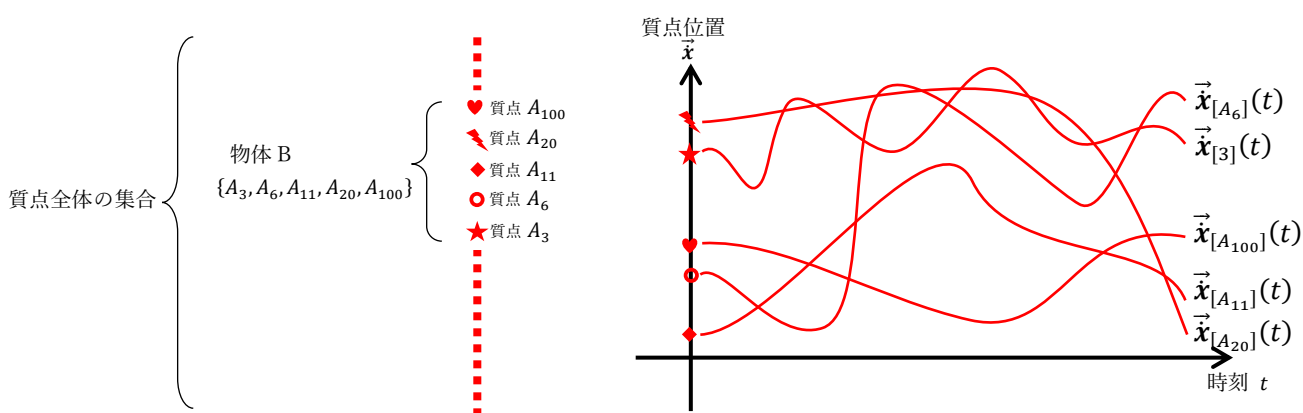
「質点 A_k 」と「物体 $\{A_k\}$ 」は元来異なるものであるが、 N 質点系においてはしばしば同一視される。

【問題 20】 質点位置と物体位置の関係

$\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ を基にした N 質点系を考え、物体 $\{A_k\} (1 \leq k \leq N)$ の質量を m_k 、時刻 t における質点 A_k の位置を $\vec{x}_{[A_k]}(t)$ とする。

また、 j 個の質点から成る物体 B を、 $B = \{A_{b_1}, A_{b_2}, \dots, A_{b_j}\}$ とする

(例)



このとき、物体 B の物体速度と、物体 B に属する質点の質点速度を質量により加重平均値したベクトルは一致することを証明せよ。

また、物体 B の物体加速度と、物体 B に属する質点の質点加速度を質量により加重平均値したベクトルは一致することを証明せよ。

すなわち

$$\frac{d}{dt} \vec{x}_{[B]}(t) = \frac{\sum_{k=1}^j \left\{ m_{[A_{b_k}]} \frac{d}{dt} \vec{x}_{[A_{b_k}]}(t) \right\}}{m_{[B]}} \quad , \quad \frac{d^2}{dt^2} \vec{x}_{[B]}(t) = \frac{\sum_{k=1}^j \left\{ m_{[A_{b_k}]} \frac{d^2}{dt^2} \vec{x}_{[A_{b_k}]}(t) \right\}}{m_{[B]}}$$

を示せ。

質点位置の定義より

$$\vec{x}_{[B]}(t) = \frac{\int_{p \in B} \vec{x}_{[p]}(t) dm_{[p]}}{m_{[B]}}$$

であるが、いま質点が有限個（N 個）なので、積分を和に書き換え、

$$\vec{x}_{[B]}(t) = \frac{\sum_{k=1}^J \left\{ m_{[A_{b_k}]} \vec{x}_{[A_{b_k}]}(t) \right\}}{m_{[B]}}$$

とすることができる。

これを両辺微分すると

$$\frac{d}{dt} \vec{x}_{[B]}(t) = \frac{d}{dt} \frac{\sum_{k=1}^J \left\{ m_{[A_{b_k}]} \vec{x}_{[A_{b_k}]}(t) \right\}}{m_{[B]}} = \frac{\sum_{k=1}^J \left\{ m_{[A_{b_k}]} \frac{d}{dt} \vec{x}_{[A_{b_k}]}(t) \right\}}{m_{[B]}}$$

さらに微分すると

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{x}_{[B]}(t) = \frac{d}{dt} \frac{\sum_{k=1}^J \left\{ m_{[A_{b_k}]} \vec{x}_{[A_{b_k}]}(t) \right\}}{m_{[B]}} = \frac{\sum_{k=1}^J \left\{ m_{[A_{b_k}]} \frac{d^2}{dt^2} \vec{x}_{[A_{b_k}]}(t) \right\}}{m_{[B]}}$$

が得られる。

（注）一般的には、「平均の微分」と「微分の平均」は必ずしも一致しない。

したがって

$$\frac{d}{dt} \vec{x}_{[B]}(t) = \frac{\int_{p \in B} \frac{d}{dt} \vec{x}_{[p]}(t) dm_{[p]}}{m_{[B]}} \quad , \quad \frac{d^2}{dt^2} \vec{x}_{[B]}(t) = \frac{\int_{p \in B} \frac{d^2}{dt^2} \vec{x}_{[p]}(t) dm_{[p]}}{m_{[B]}}$$

が必ず成り立つとは限らない。

とはいえ、N 質点系をはじめとした実用的な力学計算では、ほとんどの場合は上記が成り立つような場合しか取り扱わないので、おおむね成り立つと考えてもさほど問題はない。

【問題 21】 N 質点系の具体例

3 個の質点の集合 $\{P, Q, R\}$ を全体集合とする物体系があり、

$$\begin{cases} m_{\{P\}} = 100 \\ m_{\{Q\}} = 200 \\ m_{\{R\}} = 300 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_{[P]}(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma \\ \dot{x}_{[Q]}(t) = \delta e^{\varepsilon t} \\ \dot{x}_{[R]}(t) = \sin(\omega t + \theta) \end{cases} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \omega, \theta \text{ は定数})$$

であるとする。このとき、

(1) 物体 $\{P\}$ と物体 $\{Q, R\}$ について、次が成り立つことを証明せよ。

$$\begin{aligned} \textcircled{1} & \begin{cases} m_{\{P\}} = 100 \\ x_{\{P\}}(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma \\ v_{\{P\}}(t) = 2\alpha t + \beta \\ a_{\{P\}}(t) = 2\alpha \end{cases} \\ \textcircled{2} & \begin{cases} m_{\{Q,R\}} = 500 \\ x_{\{Q,R\}}(t) = \frac{2\delta e^{\varepsilon t} + 3 \sin(\omega t + \theta)}{5} \\ v_{\{Q,R\}}(t) = \frac{2\varepsilon \delta e^{\varepsilon t} + 3\omega \cos(\omega t + \theta)}{5} \\ a_{\{Q,R\}}(t) = \frac{2\varepsilon^2 \delta e^{\varepsilon t} - 3\omega^2 \sin(\omega t + \theta)}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

① 仮定より $m_{\{P\}} = 100$ は明らか。

また、

$$x_{\{P\}}(t) = \frac{\int_{p \in \{P\}} \dot{x}_{[p]}(t) dm_{[p]}}{m_{\{P\}}} = \frac{\dot{x}_{[P]}(t) m_{\{P\}}}{m_{\{P\}}} = \frac{100 \dot{x}_{[P]}(t)}{100} = \dot{x}_{[P]}(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$$

$$v_{\{P\}}(t) = \frac{d}{dt} x_{\{P\}}(t) = \frac{d}{dt} (\alpha t^2 + \beta t + \gamma) = 2\alpha t + \beta$$

$$a_{\{P\}}(t) = \frac{d}{dt} v_{\{P\}}(t) = \frac{d}{dt} (2\alpha t + \beta) = 2\alpha$$

② $\{Q, R\} = \{Q\} \cup \{R\}$ で、かつ $\{Q\} \cap \{R\} = \emptyset$ であるので、

$$m_{\{Q,R\}} = m_{\{Q\}} + m_{\{R\}} = 200 + 300 = 500$$

② $\{Q, R\} = \{Q\} \cup \{R\}$ で、かつ $\{Q\} \cap \{R\} = \emptyset$ であるので、

$$m_{\{Q, R\}} = m_{\{Q\}} + m_{\{R\}} = 200 + 300 = 500$$

また、

$$x_{\{Q, R\}}(t) = \frac{\int_{p \in \{P\}} \dot{x}_{\{P\}}(t) dm_{\{P\}}}{m_{\{Q, R\}}} = \frac{\dot{x}_{\{Q\}}(t)m_{\{Q\}} + \dot{x}_{\{R\}}(t)m_{\{R\}}}{m_{\{Q, R\}}} = \frac{200\dot{x}_{\{Q\}}(t) + 300\dot{x}_{\{R\}}(t)}{500} = \frac{2\dot{x}_{\{Q\}}(t) + 3\dot{x}_{\{R\}}(t)}{5} = \frac{2\delta e^{\epsilon t} + 3\sin(\omega t + \theta)}{5}$$

$$v_{\{P\}}(t) = \frac{d}{dt} x_{\{P\}}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{2\delta e^{\epsilon t} + 3\sin(\omega t + \theta)}{5} \right) = \frac{2\frac{d}{dt}\delta e^{\epsilon t} + 3\frac{d}{dt}\sin(\omega t + \theta)}{5} = \frac{2\epsilon\delta e^{\epsilon t} + 3\omega\cos(\omega t + \theta)}{5}$$

$$a_{\{P\}}(t) = \frac{d}{dt} v_{\{P\}}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{2\epsilon\delta e^{\epsilon t} + 3\omega\cos(\omega t + \theta)}{5} \right) = \frac{2\epsilon\delta\frac{d}{dt}e^{\epsilon t} + 3\omega\frac{d}{dt}\cos(\omega t + \theta)}{5} = \frac{2\epsilon^2\delta e^{\epsilon t} - 3\omega^2\sin(\omega t + \theta)}{5}$$

(2) $\{P, \{Q, R\}\}$ が $\{P, Q, R\}$ の直和分割であることを証明せよ。

$\{P, \{Q, R\}\} \neq \emptyset$ であり、すなわち $\{P, \{Q, R\}\}$ は空集合を要素に持たない。

また、 $\{P\} \cup \{Q, R\} = \{P, \{Q, R\}\}$ であり、すなわち $\{P, \{Q, R\}\}$ のすべての元の和集合は $\{P, Q, R\}$ と等しい。

また、 $\{P\} \cap \{Q, R\} = \emptyset$ であり、すなわち $\{P, \{Q, R\}\}$ の任意の2つの異なる元の共通部分は空集合である。

以上より、 $\{P, \{Q, R\}\}$ は $\{P, Q, R\}$ の直和分割である。

(3) $\{P\}, \{Q, R\}$ を基にした 2 質点系について、すべての物体を列挙し、それぞれの質量、物体位置、物体速度、物体加速度を求めよ。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{物体 } \emptyset \\ m_{[\emptyset]} = 0 \\ x_{[\emptyset]}(t) = 0 \\ v_{[\emptyset]}(t) = 0 \\ a_{[\emptyset]}(t) = 0 \end{array} \right. \quad (\because \emptyset \text{ に関する質量、位置の定義より})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{物体 } \{P\} \\ m_{[\{P\}]} = 100 \\ x_{[\{P\}]}(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma \\ v_{[\{P\}]}(t) = 2\alpha t + \beta \\ a_{[\{P\}]}(t) = 2\alpha \end{array} \right. \quad (\because (1) \text{ ①より})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{物体 } \{Q, R\} \\ m_{[\{Q, R\}]} = 500 \\ x_{[\{Q, R\}]}(t) = \frac{2\delta e^{\epsilon t} + 3 \sin(\omega t + \theta)}{5} \\ v_{[\{Q, R\}]}(t) = \frac{2\epsilon \delta e^{\epsilon t} + 3\omega \cos(\omega t + \theta)}{5} \\ a_{[\{Q, R\}]}(t) = \frac{2\epsilon^2 \delta e^{\epsilon t} - 3\omega^2 \sin(\omega t + \theta)}{5} \end{array} \right.$$

また、【問題 21】を用いると、

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{物体 } \{\{P\}, \{Q, R\}\} \\ m_{[\{\{P\}, \{Q, R\}\}]} = m_{[\{P\}]} + m_{[\{Q, R\}]} = 100 + 500 = 600 \\ x_{[\{\{P\}, \{Q, R\}\}]}(t) = \frac{m_{[\{P\}]}x_{[\{P\}]}(t) + m_{[\{Q, R\}]}x_{[\{Q, R\}]}(t)}{m_{[\{\{P\}, \{Q, R\}\}]}} = \frac{100(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) + 500\left(\frac{2\delta e^{\epsilon t} + 3 \sin(\omega t + \theta)}{5}\right)}{600} \\ = \frac{(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) + 2(\delta e^{\epsilon t}) + 3(\sin(\omega t + \theta))}{6} \\ v_{[\{\{P\}, \{Q, R\}\}]}(t) = \frac{m_{[\{P\}]}v_{[\{P\}]}(t) + m_{[\{Q, R\}]}v_{[\{Q, R\}]}(t)}{m_{[\{\{P\}, \{Q, R\}\}]}} = \frac{100(2\alpha t + \beta) + 500\left(\frac{2\epsilon \delta e^{\epsilon t} + 3\omega \cos(\omega t + \theta)}{5}\right)}{600} \\ = \frac{(2\alpha t + \beta) + 2(\epsilon \delta e^{\epsilon t}) + 3(\omega \cos(\omega t + \theta))}{6} \\ a_{[\{\{P\}, \{Q, R\}\}]}(t) = \frac{m_{[\{P\}]}a_{[\{P\}]}(t) + m_{[\{Q, R\}]}a_{[\{Q, R\}]}(t)}{m_{[\{\{P\}, \{Q, R\}\}]}} = \frac{100(2\alpha) + 500\left(\frac{2\epsilon^2 \delta e^{\epsilon t} - 3\omega^2 \sin(\omega t + \theta)}{5}\right)}{600} \\ = \frac{(2\alpha) + 2(\epsilon^2 \delta e^{\epsilon t}) + 3(-\omega^2 \sin(\omega t + \theta))}{6} \end{array} \right.$$

【解説7】運動量、力、質量、ニュートンの運動方程式

無定義

運動量 $\vec{p}_{[A]}(t)$

物体Aの運動状態（運動の激しさ）を示す固有の物理量を「運動量」という。
大きさと方向を持ち、したがってベクトルである。

（注意）

運動量は「固有の物理量」であって、「質量と速度の積」とは限らない。たとえば光（電磁波）は、質量がゼロであるが運動量を持つ。

無定義

力 $\vec{F}_{[A]}(t)$

物体に対して物理的に作用し、物体が動きの変化の原因となる固有の物理量を「力」と呼ぶ。

「力」は大きさと方向を持ち、したがってベクトルである。

無定義

質量

物体の「動かしにくさ」を表す固有の物理量を、「質量」という。
質量はスカラー量であり、通常は m と記す。

（注）ニュートン力学においては、質量は時間的に変化しない定数として取り扱う。

物理法則

ニュートン力学の第1法則

”運動量の時間変化率”は「力」と等しく、すなわち

$$\frac{d\vec{p}_{[A]}(t)}{dt} = \vec{F}_{[A]}(t)$$

が成り立つ。

(注) (ニュートン力学の第1法則) は、実験や観測、あるいは直観により得られた物理的な法則であって、数学的な根拠があるものではない。

数学的定義

慣性系

物体系全体が加速していない時、すなわち全体物体を U として、

$$\vec{a}_{[U]}(t) = \vec{0}$$

が成り立つとき、その物体系を慣性系と呼ぶ。

慣性系でない物体系を非慣性系と呼ぶ。

物理法則

絶対静止系 (ニュートン力学の第1法則の本質的な主張)

非慣性系においては、ニュートン力学の第1法則は成立しない。

例えば加速している電車の中でボールを自由落下させると、なにも力が加わってないにも関わらず物体が加速する。

ニュートン力学の第1法則は、慣性系においてのみ成立し、ニュートン力学の第1法則の本質的な主張は、

「ニュートン力学の第1法則が成立するような物体系が、この宇宙に少なくとも一つ存在する。」

ということである。

このような慣性系を「絶対静止系」と呼ぶ。

数学定理

ニュートン力学の第1法則により、

$$\vec{p}_{[A]}(t) = \int \vec{F}_{[A]}(t) dt$$

が得られる。すなわち運動量は力の時間積分値と等しい。

物理法則

ニュートン力学の第2法則（ニュートンの運動方程式）

ある物体Aの運動量は物体Aの速度 ($\vec{v}_{[A]}(t)$) に比例し、比例定数はその物体の質量である。
すなわち、

$$\vec{p}_{[A]}(t) = m_{[A]} \vec{v}_{[A]}(t)$$

の関係が成立する。

これをニュートンの運動方程式という。

（注）ニュートンの運動方程式は、実験や観測、あるいは直観により得られた物理的な法則であって、数学的な根拠があるものではない。

（注）ニュートンの運動方程式は、ある条件下では（物体の速度が光速に比べて無視し得ない場合には）成立しない。

特殊相対性理論においては $p = \frac{mv}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$ である。（ c は光速）

数学定理

ニュートンの運動方程式を両辺微分すると、 $\frac{d\vec{p}_{[A]}(t)}{dt} = m \frac{d\vec{v}_{[A]}(t)}{dt}$ であり、したがって

$$\vec{F}_{[A]}(t) = m_{[A]} \vec{a}_{[A]}(t)$$

が得られる。（実用上はこちらの方を「ニュートンの運動方程式」と呼ぶことが一般的であり、実用上はこちらの方がしばしば用いられる。）

数学定理

物体系が慣性系のとき、

$$\vec{F}_{[U]}(t) = \vec{0}$$

が成り立つ。

つまり、慣性系においては全体物体Uにかかる力は $\vec{0}$ である。

数学定理

ニュートン力学の第1法則および第2法則（後述）により、すべての物体は、外部から力が作用しない限り、静止している物体は静止状態を続け、運動している物体は等速直線運動を続ける。

（注）こちらの方を「ニュートン力学の第1法則」と呼ぶことが一般的である。いずれにせよ本質は「運動量の時間的な変化」と「力」は等しい。」という点にある。

数学定理

ニュートン力学の第3法則（作用・反作用の法則）

慣性系においては、物体Aに作用する力と物体A^cに作用する力は、大きさが等しく逆向きである。

すなわち

$$\vec{F}_{[A]}(t) = -\vec{F}_{[A^c]}(t)$$

の関係が成立する。

（注）通常は2質点系で考え、「2つの物体 A、B に外力が働かない場合、物体Aに作用する力と、物体Bに作用する力は、大きさが等しく、逆向きである。」と記されるが、同義である。

（注）運動量関数の加法性を前提とすれば当然の帰結であるので、物理法則ではなく数学定理とした。

数学定理

運動量保存則

ある物体系の全体物体に外力が作用しないのであれば、その物体系の全体物体の運動量は保存される（時間的に変化しない）。

（注）一見、同義の事項（運動量の時間微分が0であること、運動量が時間変化しないこと）を並べてたてており自明ではないと思われるが、そういう趣旨ではない。ここでは、当該物体系にニュートン力学の第1法則が成立していることは前提とされていない。

（注）ただし、当該物体系を包含するような絶対静止系が存在すること（ニュートン力学の第1法則の本質的な主張）は認める。

（注）「外力」とは、当該物体系の“外部の物体”が、当該物体系の全体物体に及ぼす力である。要するに運動量保存法則は「慣性系の内部のある物体系が、当該物体系の外部から力を受けないならば、当該物体系も慣性系である。」ということを述べていることになる。

【問題 22】 慣性の法則（ニュートン力学の第 1 法則に基づく慣性運動）

ニュートン力学の第 1 法則 $\frac{d\vec{p}_{[A]}(t)}{dt} = \vec{F}_{[A]}(t)$ と、ニュートンの運動方程式 $\vec{F}_{[A]}(t) = m_{[A]} \vec{a}_{[A]}(t)$ を用いて、「すべての物体は、外部から力が作用しない限り、静止している物体は静止状態を続け、運動している物体は等速直線運動を続ける。」ことを証明せよ。

外部から力が作用しないので $\vec{F}_{[A]}(t) = \vec{0}$ であり、これをニュートンの運動方程式 $\vec{F}_{[A]}(t) = m_{[A]} \vec{a}_{[A]}(t)$ に入
して、

$$\vec{a}_{[A]}(t) = \vec{0}$$

が得られる。

これを両辺積分して

$$\vec{v}_{[A]}(t) = \vec{c} \quad (\vec{c} \text{ は定ベクトル})$$

が得られる。

つまり速度は初期状態から変化しないのであるから、「すべての物体は、外部から力が作用しない限り、静止して
いる物体は静止状態を続け、運動している物体は等速直線運動を続ける。」ことが示された。

【問題 23】 ニュートン力学の第 2 法則（ニュートンの運動方程式）

ニュートン力学の第 1 法則およびニュートン力学の第 2 法則を用いて、「物体の加速度は、そのとき物体に作用する力の定数倍であり、比例定数は物体の質量である。」ことを証明せよ。

ニュートン力学の第 2 法則

$$\vec{p}_{[A]}(t) = m_{[A]} \vec{v}_{[A]}(t)$$

を両辺微分して、

$$\frac{d\vec{p}_{[A]}(t)}{dt} = m \frac{d\vec{v}_{[A]}(t)}{dt}$$

が得られる。

また、ニュートン力学の第 1 法則より

$$\frac{d\vec{p}_{[A]}(t)}{dt} = \vec{F}_{[A]}(t)$$

加速度の定義より

$$\frac{d\vec{v}_{[A]}(t)}{dt} = \vec{a}_{[A]}(t)$$

であるので、これを代入すると

$$\vec{F}_{[A]}(t) = m_{[A]} \vec{a}_{[A]}(t)$$

が成り立つ。

【問題 24】作用・反作用の法則（ニュートン力学の第 3 法則）

ニュートン力学の第 1 法則を用いて、

「慣性系においては、物体系の中のすべての物体 A について、物体 A に作用する力と、物体 A^c に作用する力は、大きさが等しく、逆向きである。」

ことを証明せよ。

全体物体を U とする。

ニュートン力学の第 1 法則より

$$\frac{d\vec{p}_{[U]}(t)}{dt} = \vec{F}_{[U]}(t)$$

が成立しており、また慣性系であるという仮定より

$$\vec{F}_{[U]}(t) = \vec{0}$$

であるので、

$$\frac{d\vec{p}_{[U]}(t)}{dt} = \vec{0}$$

が成り立つ。

また、 $U = A \cup A^c$ であり、かつ $A \cap A^c = \phi$ であるので、

$$\vec{p}_{[U]}(t) = \vec{p}_{[A]}(t) + \vec{p}_{[A^c]}(t)$$

が成り立ち、したがって

$$\frac{d\vec{p}_{[U]}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \{ \vec{p}_{[A]}(t) + \vec{p}_{[A^c]}(t) \} = \frac{d\vec{p}_{[A]}(t)}{dt} + \frac{d\vec{p}_{[A^c]}(t)}{dt} = \vec{0}$$

が成り立つ。

いま、ニュートン力学の第 1 法則より $\frac{d\vec{p}_{[A]}(t)}{dt} = \vec{F}_{[A]}(t)$ 、 $\frac{d\vec{p}_{[A^c]}(t)}{dt} = \vec{F}_{[A^c]}(t)$ であるので、

$$\vec{F}_{[A]}(t) + \vec{F}_{[A^c]}(t) = \vec{0}$$

が成り立つ。

したがって

$$\vec{F}_{[A]}(t) = -\vec{F}_{[A^c]}(t)$$

であり、よって題意が証明された。

【問題 25】運動量保存則

作用・反作用の法則（ニュートン力学の第 3 法則）を用いて、
「ある物体系の全体物体に外力が作用しないのであれば、その物体系の全体物体の運動量は保存される（時間的に変化しない）。」

ことを証明せよ。

なお当該物体系が慣性系であることは前提とせず、当該物体系を包含するような別の慣性系（絶対静止系）が少なくとも一つ存在することは前提とする。

当該物体系の全体物体を U とする。

このとき、 $U \subset \Omega$ なる Ω を全体物体とする慣性系が少なくとも一つ存在する。

したがって、 Ω を全体物体とする慣性系の中で、

$$\frac{d\vec{p}_{[U]}(t)}{dt} = \vec{F}_{[U]}(t)$$

が成立する。

また、 Ω を全体物体とする慣性系において、作用・反作用の法則（ニュートン力学の第 3 法則）が成立しているので、

$$\vec{F}_{[U]}(t) = -\vec{F}_{[U^c]}(t)$$

が成立する。

まず $U^c \subset U$ のとき $U^c = \emptyset$ であることから、

$$\frac{d\vec{p}_{[U]}(t)}{dt} = \vec{F}_{[U]}(t) = -\vec{F}_{[U^c]}(t) = -\vec{F}_{[\emptyset]}(t) = -\frac{d\vec{p}_{[\emptyset]}(t)}{dt} = -\frac{d\vec{0}}{dt} = 0$$

が成立する。

次に $U^c \not\subset U$ のとき、すなわち U^c は U の部分集合ではなく、したがって U^c は U を全体物体とする物体系の中の物体ではないとき、外力が作用しないという仮定から

$$\vec{F}_{[U]}(t) = -\vec{F}_{[U^c]}(t) = 0$$

であり、したがって

$$\frac{d\vec{p}_{[U]}(t)}{dt} = 0$$

が成立する。

以上、いずれの場合においても $\frac{d\vec{p}_{[U]}(t)}{dt} = 0$ なので、題意は証明された。

【解説 8】 力積

数学的定義

力積

物体Aの運動量の、時刻 t_0 から時刻 t_1 までの変化量

$$\vec{I}_{[A]}(t_0, t_1) = \vec{p}_{[A]}(t_1) - \vec{p}_{[A]}(t_0)$$

を、物体Aの時刻 t_0 から時刻 t_1 までの力積という。

力積は大きさと方向を持ち、したがってベクトルである。

数学定理

力積は、最後の時刻における質量と速度の積と、最初の時刻における質量と速度の積の差と等しい。

すなわち、

$$\vec{I}_{[A]}(t_0, t_1) = m_{[A]} \vec{v}_{[A]}(t_1) - m_{[A]} \vec{v}_{[A]}(t_0)$$

が成り立つ。

数学定理

力積は、物体に作用する力を時間積分した値と等しい。

すなわち、

$$\vec{I}_{[A]}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{[A]}(t) dt$$

が成り立つ。

数学定理

最後の時刻における質量と速度の積と、最初の時刻における質量と速度の積の差は、物体に作用する力を時間積分した値と等しい。

すなわち、

$$m_{[A]} \vec{v}_{[A]}(t_1) - m_{[A]} \vec{v}_{[A]}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{[A]}(t) dt$$

であることが分かる。

【問題 26】 力積の性質

力積の定義およびニュートン力学の第 1 法則、ニュートン力学の第 2 法則（ニュートンの運動方程式）に基づき、次が成り立つことを証明せよ。

$$(1) \quad \vec{I}_{[A]}(t_0, t_1) = m_{[A]} \vec{v}_{[A]}(t_1) - m_{[A]} \vec{v}_{[A]}(t_0)$$

$$(2) \quad \vec{I}_{[A]}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{[A]}(t) dt$$

(3) $\vec{F}_{[A]}(t)$ が時間に関して定ベクトル ($\vec{F}_{[A]}$ とする。) の時

$$\vec{I}_{[A]}(t_0, t_1) = \vec{F}_{[A]}(t_1 - t_0)$$

$$(4) \quad m_{[A]} \vec{v}_{[A]}(t_1) - m_{[A]} \vec{v}_{[A]}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{[A]}(t) dt$$

(1) 力積の定義より

$$\vec{I}_{[A]}(t_0, t_1) = \vec{p}_{[A]}(t_1) - \vec{p}_{[A]}(t_0)$$

であり、またニュートン力学の第 2 法則において $t = t_0, t = t_1$ の場合を考えると、

$$\begin{cases} \vec{p}_{[A]}(t_0) = m_{[A]} \vec{v}_{[A]}(t_0) \\ \vec{p}_{[A]}(t_1) = m_{[A]} \vec{v}_{[A]}(t_1) \end{cases}$$

であるので、これらを代入すると

$$\vec{I}_{[A]}(t_0, t_1) = m_{[A]} \vec{v}_{[A]}(t_1) - m_{[A]} \vec{v}_{[A]}(t_0)$$

が成り立つ。

(2) ニュートン力学の第 1 法則により

$$\frac{d\vec{p}_{[A]}(t)}{dt} = \vec{F}_{[A]}(t)$$

であるからこれを積分すると

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d\vec{p}_{[A]}(t)}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{[A]}(t) dt$$

$$[\vec{p}_{[A]}(t)]_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{[A]}(t) dt$$

$$\vec{p}_{[A]}(t_1) - \vec{p}_{[A]}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{[A]}(t) dt$$

であり、これを力積の定義 $\vec{I}_{[A]}(t_0, t_1) = \vec{p}_{[A]}(t_1) - \vec{p}_{[A]}(t_0)$ に代入し、

$$\vec{I}_{[A]}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{[A]}(t) dt$$

が成り立つ。

(3) 上記(2)より

$$\vec{I}_{[A]}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{[A]}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{[A]} dt = \vec{F}_{[A]} \int_{t_0}^{t_1} dt = \vec{F}_{[A]} [t]_{t_0}^{t_1} = \vec{F}_{[A]}(t_1 - t_0)$$

(4) 上記(1)(2)より

$$m_{[A]} \vec{v}_{[A]}(t_1) - m_{[A]} \vec{v}_{[A]}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{[A]}(t) dt$$

が成り立つ。

(5) $t_0 \neq t_1$ のとき、質量が 0 ではない物体 A の、時刻 t_0 における速度と時刻 t_1 における速度が等しくないならば、ある時刻 T ($t_0 \leq T \leq t_1$) が存在し、 $\vec{F}_{[A]}(T) \neq \vec{0}$ であることを証明せよ。

背理法を用いる。

$t_0 \leq t \leq t_1$ において $\vec{F}_{[A]} t \equiv \vec{0}$ (恒等的に $\vec{0}$) であると仮定する。

これを、

$$m_{[A]} \vec{v}_{[A]}(t_1) - m_{[A]} \vec{v}_{[A]}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{[A]}(t) dt$$

に代入すると、

$$m_{[A]} \vec{v}_{[A]}(t_1) - m_{[A]} \vec{v}_{[A]}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{0} dt$$

$$m_{[A]} \vec{v}_{[A]}(t_1) - m_{[A]} \vec{v}_{[A]}(t_0) = \vec{0}$$

$$\vec{v}_{[A]}(t_1) - \vec{v}_{[A]}(t_0) = \vec{0}$$

$$\vec{v}_{[A]}(t_1) = \vec{v}_{[A]}(t_0)$$

であり、速度が等しくないという仮定に矛盾する。

以上より題意が証明された。

【問題 27】 力積の計算

直線上を運動する質量 m の物体があり、時刻 t における位置が $x(t) = t^3 - 7t^2 + 5t + 9$ である。

時刻 $T - 2$ から時刻 T までの力積が -56 、また時刻 T から時刻 $T + 2$ までの力積が -8 であるとき、質量 m と時刻 T を求めよ。

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx(t)}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}(t^3 - 7t^2 + 5t + 9) \\ &= 3t^2 - 14t + 5 \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} I(T - 2, T) &= mv(T) - mv(T - 2) \\ &= m\{3T^2 - 14T + 5\} - m\{3(T - 2)^2 - 14(T - 2) + 5\} \\ &= 12mT - 40m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(T, T + 2) &= mv(T + 2) - mv(T) \\ &= m\{3(T + 2)^2 - 14(T + 2) + 5\} - m\{3T^2 - 14T + 5\} \\ &= 12mT - 16m \end{aligned}$$

よって仮定より

$$\begin{cases} 12mT - 40m = -56 \\ 12mT - 16m = -8 \end{cases}$$

これを解いて

$$\begin{cases} m = 2 \\ T = 1 \end{cases}$$

【解説 9】 運動エネルギーと仕事量

以下しばらく、簡単のために、物体は 1 次元上で運動することにする。

数学定理

運動エネルギーと仕事量

今、ある物体が空間上を何かの力を受けながら運動しているとする。

物体が受ける力 $F(t)$ は時刻ごとに定まるのであるが、

時刻ごとに物体の位置 $x(t)$ が定まり、

物体の位置 $x(t)$ ごとに受ける力 $\tilde{F}(x)$ が定められている。

と解釈することもできる。

つまり、 F は $\tilde{F}$ と x の合成関数で

$$F(t) = \tilde{F}(x(t))$$

であると解釈できる。

(注) 同じ位置に差し掛かったら必ず同じ力を受けるとは限らないが (たとえば貨物を牽引してある区間を往復した場合、同じ場所を通るときでも行きと帰りで受ける力が異なっている。) が、差し当たりそういう場合は除外して考えることにする。

ニュートン力学の第 2 法則に基づくと

$$m \frac{dv(t)}{dt} = F(t)$$

すなわち

$$m \frac{dv(t)}{dt} = \tilde{F}(x(t))$$

であるので、両辺を $x(t)$ で積分すると (積分区間は $[x(t_0), x(t_1)]$ とする。)

$$\int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \left\{ m \frac{dv(t)}{dt} \right\} dx(t) = \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \tilde{F}(x(t)) dx(t)$$

$$\int_{v(t_0)}^{v(t_1)} \left\{ m \frac{dx(t)}{dt} \right\} dv(t) = \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \tilde{F}(x(t)) dx(t)$$

$$\int_{v(t_0)}^{v(t_1)} mv(t) dv(t) = \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \tilde{F}(x(t)) dx(t)$$

$$\left[\frac{1}{2}mv(t)^2 \right]_{v(t_0)}^{v(t_1)} = \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \tilde{F}(x(t)) dx(t)$$

したがって

$$\frac{1}{2}mv(t_1)^2 - \frac{1}{2}mv(t_0)^2 = \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \tilde{F}(x(t)) dx(t)$$

となる。

左辺 $\frac{1}{2}mv(t_1)^2 - \frac{1}{2}mv(t_0)^2$ を物体の持つ「運動エネルギー（の増加）」、右辺

$\int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \tilde{F}(x(t)) dx(t)$ を物体が受けた「仕事量」と呼ぶ。

（注）時間軸から力への関数 F と空間軸から力への関数 $\tilde{F}$ は、関数としては別の関数であるから表記を区別すべきでなのであるが、通常はどちらも F と書き、場合に応じて t の関数とみなことも x の関数と見做すこともある。

（注）運動量・力積 $mv = \int F dt$ と、運動エネルギー・仕事量 $\frac{1}{2}mv^2 = \int F dx$ は似た概念で混同しやすいが、

前者は「力を時間軸方向に積分した物理量」

後者は「力を空間軸方向に積分した物理量」

である。

【問題 28】 エネルギー、仕事量の計算（等加速度運動）

1次元空間上を運動する質量 m の物体があり、物体にかかる力を

$$F \text{ (定数、} F > 0 \text{)}$$

とする。

- (1) 物体が位置 x_0 から位置 x_1 まで移動したとき、物体が受ける仕事量を求めよ。
- (2) 初期条件を $x(0) = 0, v(0) = 0$ とする。このとき、時刻 t における、物体の運動エネルギー $\frac{1}{2}mv(t)^2$ と、物体の位置 $x(t)$ との関係式を求めよ。
- (3) 上記(2)の関係式より、 $x(t)$ を求めよ。

(1) 仕事量は $\int_{x_0}^{x_1} F dx = F \int_{x_0}^{x_1} dx = F[x]_{x_0}^{x_1} = Fx_1 - Fx_0$ である。

(2) $\frac{1}{2}mv(t)^2 - \frac{1}{2}mv(0)^2 = \int_{x(0)}^{x(t)} F dx(t)$ より、

$$\frac{1}{2}mv(t)^2 - \frac{1}{2}m \times 0^2 = Fx(t) - Fx(0) = Fx(t) - F \times 0 = Fx(t)$$

よって

$$\frac{1}{2}mv(t)^2 = Fx(t)$$

(3) 上記(2)より $\frac{1}{2}mv(t)^2 > 0, F > 0$ より、 $x(t) > 0$ であることに注意すると、 $v(t) = \sqrt{\frac{2F}{m}}\sqrt{x(t)}$ を得る。

以下、微分方程式 $\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2F}{m}}\sqrt{x}$ を解く。

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{2F}{m}} \int dt$$

$$2\sqrt{x} = \sqrt{\frac{2F}{m}}t + C$$

初期条件 $x(0) = 0$ より $C = 0$ なので、

$$2\sqrt{x} = \sqrt{\frac{2F}{m}}t$$

$$x = \frac{F}{2m}t^2$$

すなわち、

$$x(t) = \frac{F}{2m}t^2$$

である。

【問題 29】 エネルギー、仕事量の計算（単振動）

1次元空間上を運動する質量 m の物体があり、物体にかかる力を

$$F(x(t)) = -kx(t) \quad (k \text{ は定数, } k > 0)$$

とする。

(1) 物体が位置 x_0 から位置 x_1 まで移動したとき、物体が受ける仕事量を求めよ。

(2) 初期条件を $x(0) = A$ 、 $v(0) = 0$ とする。このとき、時刻 t における、物体の運動エネルギー $\frac{1}{2}mv(t)^2$ と、物体の位置 $x(t)$ との関係式を求めよ。

(3) $x(t) = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t$ のとき、上記(2)の関係式が性質することを示せ。

$$(1) \text{ 仕事量は } \int_{x_0}^{x_1} F(x(t)) dx = -k \int_{x_0}^{x_1} x(t) dx = -k \left[\frac{1}{2} x(t)^2 \right]_{x_0}^{x_1} = \left(-\frac{k}{2} x_1^2 \right) - \left(-\frac{k}{2} x_0^2 \right) \text{ である。}$$

$$(2) \frac{1}{2}mv(t)^2 - \frac{1}{2}mv(0)^2 = \int_{x(0)}^{x(t)} F dx(t) \text{ より、}$$

$$\frac{1}{2}mv(t)^2 - \frac{1}{2}m \times 0^2 = \left(-\frac{k}{2} x(t)^2 \right) - \left(-\frac{k}{2} x(0)^2 \right) = \left(-\frac{k}{2} x(t)^2 \right) - \left(-\frac{k}{2} A^2 \right)$$

よって

$$\frac{1}{2}mv(t)^2 = \left(-\frac{k}{2} x(t)^2 \right) - \left(-\frac{k}{2} A^2 \right)$$

$$(3) x(t) = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t \text{ より}$$

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{2}m \left\{ \frac{d}{dt} \left(A \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t \right) \right\}^2 = \frac{1}{2}m \left\{ -A \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t \right\}^2 = \frac{kA^2}{2} \sin^2 \sqrt{\frac{k}{m}}t$$

$$(\text{右辺}) = -\frac{k}{2} \left(A \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t \right)^2 + \frac{k}{2} A^2 = \frac{kA^2}{2} \left(1 - \cos^2 \sqrt{\frac{k}{m}}t \right) = \frac{kA^2}{2} \sin^2 \sqrt{\frac{k}{m}}t$$

よって (左辺) = (右辺)

【問題 30】 エネルギー、仕事量の計算（斥力）

1次元空間上を運動する質量 m の物体があり、物体にかかる力を

$$F(x(t)) = mk^2x(t) \quad (k \text{ は定数、} k > 0)$$

とする。

- (1) 物体が位置 x_0 から位置 x_1 まで移動したとき、物体が受ける仕事量を求めよ。
- (2) 初期条件を $x(0) = A$ 、 $v(0) = kA$ とする。このとき、時刻 t における、物体の運動エネルギー $\frac{1}{2}mv(t)^2$ と、物体の位置 $x(t)$ との関係式を求めよ。
- (3) 上記(2)の関係式より、 $x(t)$ を求めよ。

(1) 仕事量は $\int_{x_0}^{x_1} F(x(t)) dx = mk^2 \int_{x_0}^{x_1} x(t) dx = mk^2 \left[\frac{1}{2}x(t)^2 \right]_{x_0}^{x_1} = \frac{mk^2}{2}x_1^2 - \frac{mk^2}{2}x_0^2$ である。

(2) $\frac{1}{2}mv(t)^2 - \frac{1}{2}mv(0)^2 = \int_{x(0)}^{x(t)} F dx(t)$ より、

$$\frac{1}{2}mv(t)^2 - \frac{1}{2}mk^2A^2 = \frac{mk^2}{2}x(t)^2 - \frac{mk^2}{2}x(0)^2 = \frac{mk^2}{2}x(t)^2 - \frac{mk^2}{2}A^2$$

よって

$$\frac{1}{2}mv(t)^2 = \frac{mk^2}{2}x(t)^2$$

(3) 上記(2)の $\frac{1}{2}mv(t)^2 = \frac{mk^2}{2}x(t)^2$ より $v(t)^2 = k^2x(t)^2$ 、よって $v(t) = \pm kx(t)$ であるが、初期条件より $v(t) = -kx(t)$ は不適なので、 $v(t) = kx(t)$ を得る。

以下、微分方程式 $\frac{dx}{dt} = kx$ を解く。

$$\int \frac{1}{x} dx = k \int dt$$

$$\log|x| = kt + C$$

$$x = e^{kt+C}$$

初期条件 $x(0) = A$ より $e^C = A$ なので、

$$x = Ae^{kt+C}$$

すなわち、

$$x(t) = Ae^{kt+C}$$

である。

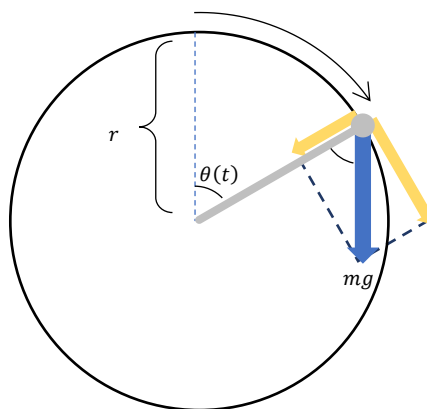
【問題 31】 エネルギー、仕事量の計算（振り子）

長さ r （質量は 0）の固い棒が、一方の端点固定されて中心となり、鉛直面の中を回転する。もう一方の端点には質量 m の物体が取り付けられている。

時刻 0 のとき、物体が回転中心の真上の位置で静止していたが、わずかに力を加えると静かに動き始めた。

重力加速度を g として、以下の問いに答えよ。

（1）時刻 t のときの回転角（真上の位置を 0 とする。）を $\theta(t)$ とすると、物体が円周に沿って移動した距離（真上の位置から物体の位置までの弧の長さ） $x(t)$ を求めよ。

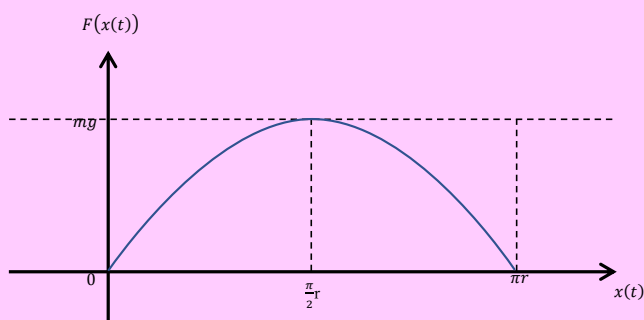


$$x(t) = r\theta(t)$$

（2）位置 $x(t)$ のときに物体に作用する力の進行方向成分（すなわち円周方向の成分） $F(x(t))$ を $x(t)$ の関数として求めよ。

また、 $0 \leq \theta(t) \leq \pi$ のときの $x(t)$ と $F(x(t))$ の関係をグラフに図示せよ。

$$F(x(t)) = mg \sin \theta(t) = mg \sin \frac{x(t)}{r}$$



(3) 位置 $x(T)$ のときの物体の円周方向の速さ $v(T)$ を $x(T)$ の式で表せ。 $(v(0))$ は非常に小さく無視しうると考えてよい。

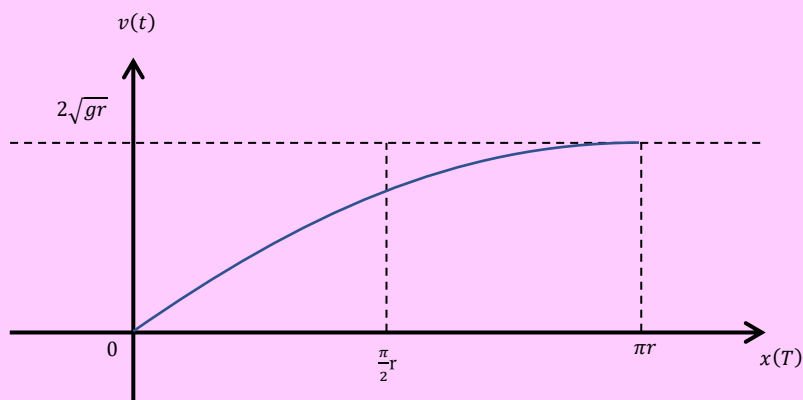
また、 $0 \leq \theta(T) \leq \pi$ のときの $x(T)$ と $v(T)$ の関係をグラフに図示せよ。

$$\frac{1}{2}mv(T)^2 - \frac{1}{2}mv(0)^2 = \int_{x(0)}^{x(T)} F(x(t)) dx(t) \quad \text{において、} \frac{1}{2}mv(0)^2 = 0, x(0) = 0 \quad \text{に注意すると、}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv(T)^2 &= \int_0^{x(T)} F(x(t)) dx(t) \\ &= \int_0^{x(T)} F(x) dx \\ &= \int_0^{x(T)} mg \sin \frac{x}{r} dx \\ &= mg \left[-r \cos \frac{x}{r} \right]_0^{x(T)} \\ &= -mgr \left(\cos \frac{x(T)}{r} - \cos \frac{0}{r} \right) \\ &= mgr \left(1 - \cos \frac{x(T)}{r} \right) \\ &= 2mgr \sin^2 \frac{x(T)}{2r} \end{aligned}$$

$$0 \leq \theta(T) \leq \pi \text{ のとき、} v(t) \geq 0, 0 \leq \frac{x(T)}{2r} \left(= \frac{\theta(T)}{2} \right) \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{であることに注意すると、}$$

$$v(T) = 2\sqrt{gr} \sin \frac{x(T)}{2r}$$



(4) 上記(3)の関係式より、 $x(T)$ を求めよ。

ただし、ある時刻 T_1 において、 $x(T_1) = r\theta_1$ であるとする。

上記(3)より、 $x(T) = r\theta(T)$ であることに注意すると、

$$\frac{dx(T)}{dT} = 2\sqrt{gr} \sin \frac{x(T)}{2r}$$

$$r \frac{d\theta(T)}{dT} = 2\sqrt{gr} \sin \frac{\theta(T)}{2}$$

$$\frac{d\theta(T)}{dT} = 2\sqrt{\frac{g}{r}} \sin \frac{\theta(T)}{2}$$

であるから、この微分方程式を解くと、

$$\int \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} d\theta = 2\sqrt{\frac{g}{r}} \int dT$$

$$(\text{左辺}) = \int \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} d\theta = \int \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{1 - \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta$$

$$(\cos \frac{\theta}{2} = z \text{ と置換すると、} \sin \frac{\theta}{2} d\theta = -2dz \text{ なので、})$$

$$= -2 \int \frac{1}{1-z^2} dz = - \int \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} \right) dz = -(-\log|1-z| + \log|1+z|) + C$$

$$= \log \left| \frac{1-z}{1+z} \right| + C = \log \left| \frac{1 - \cos \frac{\theta}{2}}{1 + \cos \frac{\theta}{2}} \right| + C = \log \left(\tan^2 \frac{\theta}{4} \right) + C = 2 \log \left(\tan \frac{\theta}{4} \right) + C$$

$$(\text{右辺}) = 2\sqrt{\frac{g}{r}} T + D$$

$$\text{よって } \log \left(\tan \frac{\theta(T)}{4} \right) = \sqrt{\frac{g}{r}} T + E \text{ なので、} \tan \frac{\theta(T)}{4} = e^{\sqrt{\frac{g}{r}} T + E}$$

$$\text{また、} x(T_1) = r\theta_1 \text{ なので、} e^E = \tan \frac{\theta_1}{4} e^{-\sqrt{\frac{g}{r}} T_1}$$

以上より

$$\tan \frac{\theta(T)}{4} = \tan \frac{\theta_1}{4} \cdot e^{\sqrt{\frac{g}{r}} (T - T_1)}$$

であるので、

$$\theta(T) = 4 \arctan \left\{ \tan \frac{\theta_1}{4} \cdot e^{\sqrt{\frac{g}{r}} (T - T_1)} \right\}$$

すなわち、

$$x(T) = 4r \cdot \arctan \left\{ \tan \frac{\theta_1}{4} \cdot e^{\sqrt{\frac{g}{r}} (T - T_1)} \right\}$$

【解説 10】力の速度方向成分と経路積分

数学定理

力の速度方向成分と経路積分（1次元空間の場合）

運動エネルギーと力の関係は

$$\frac{1}{2}mv(t_1)^2 - \frac{1}{2}mv(t_0)^2 = \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} F dx$$

であったので、積分経路の方向と F の符号を考えると、

$$\begin{cases} \text{物体の進行方向と力の方向が一致するとき} \cdots \text{エネルギー増加} \\ \text{物体の進行方向と力の方向が逆向きのとき} \cdots \text{エネルギー減少} \end{cases}$$

である。

したがって、力の速度方向成分として

$$|F|\cos\theta \quad (\theta \text{ は速度方向と力の方向のなす角})$$

を考え、これを「物体の進行方向」に沿って積分してもよい。

すなわち

$$\frac{1}{2}mv(t_1)^2 - \frac{1}{2}mv(t_0)^2 = \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} |F|\cos\theta dx$$

である。

数学定理

力の速度方向成分と経路積分 (n 次元空間の場合)

このことを一般化し n 次元空間で考えると、
 物体に作用する力のうち、物体の進行方向の成分は、運動エネルギーの増減に寄与する。
 物体に作用する力のうち、物体の進行方向と直交する成分は、運動エネルギーの増減に寄与しない。(方向を曲げるだけ)
 と理解される。

すなわち、n 次元空間においても、

$$\frac{1}{2}mv(t_1)^2 - \frac{1}{2}mv(t_0)^2 = \int_C |\vec{F}| \cos \theta \, dS$$

が成り立つ。

ここで、 C は物体の運動経路が描く軌跡、 S は C の弧長である。

数学定理

θ は力の方向 ($\vec{F}$ の方向) と運動方向 ($\frac{d\vec{F}}{dt}$ の方向) との成す角度であるから、

$$|\vec{F}| \cos \theta = \frac{\vec{F} \cdot \frac{d\vec{F}}{dt}}{\left| \frac{d\vec{F}}{dt} \right|}$$

また、 S は積分経路の弧長であるから

$$dS = \left| \frac{d\vec{F}}{dt} \right| dt$$

したがって

$$\int_C |\vec{F}| \cos \theta \, dS = \int_C \frac{\vec{F} \cdot \frac{d\vec{F}}{dt}}{\left| \frac{d\vec{F}}{dt} \right|} \times \left| \frac{d\vec{F}}{dt} \right| dt = \int_C \vec{F} \cdot \frac{d\vec{F}}{dt} dt = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{F}$$

である。

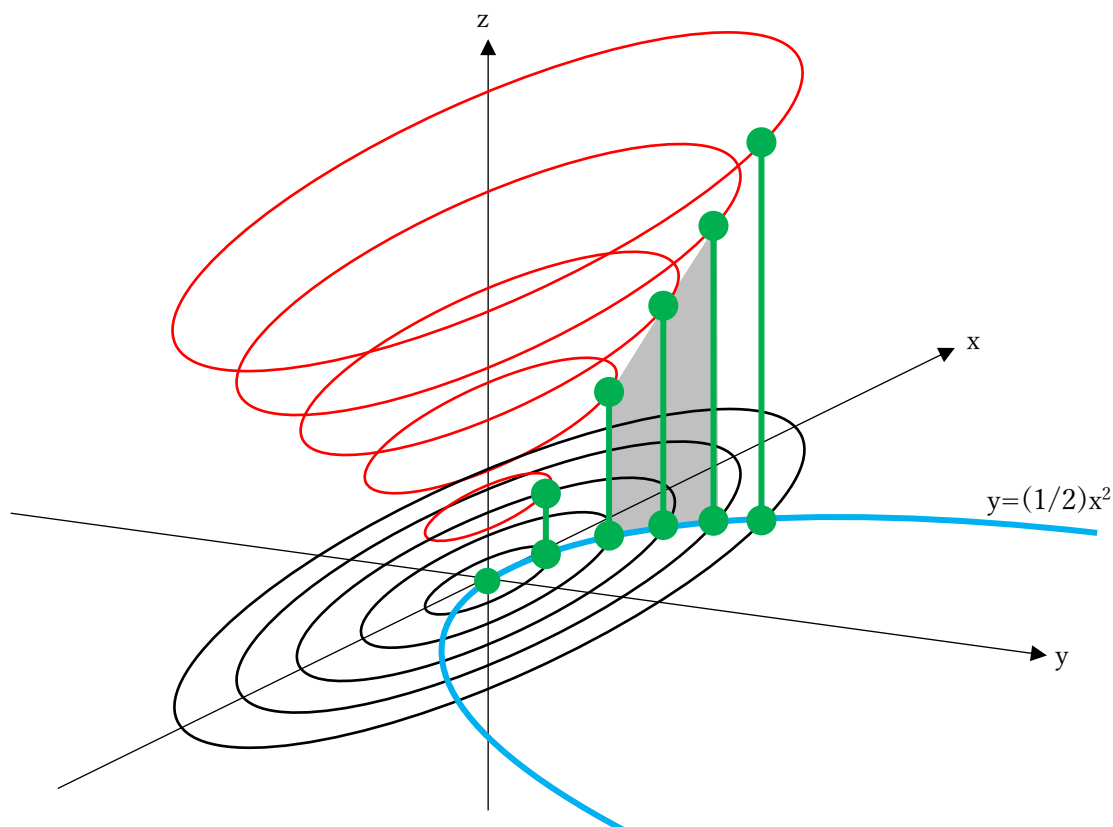
(2 次元の場合)

$\frac{d\vec{F}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$ より $d\vec{F} = (dx, dy)$ なので、

$$\int_C |\vec{F}| \cos \theta \, dS = \int_C \vec{F} \cdot (dx, dy)$$

【問題 32】 線積分の計算（切断面の面積）

xyz 立体空間において、 xy 平面と、ある楕円錐曲面に挟まれた領域を一つの立体と考える。
この立体の xy 平面上の位置 (x, y) における高さが $\sqrt{x^2 + 4y^2}$ であるとき、この立体を曲面 $y = \frac{1}{2}x^2$ ($0 \leq \alpha \leq x \leq \beta$) で切断したときの、切断面の面積を求めよ。



微小な区間 $[x, x + dx]$ において、断面を長方形と見做すと、

$$\text{底辺の長さが } |(dx, dy)| = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$\text{高さが } \sqrt{x^2 + 4y^2}$$

であるので、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x^2 + 4y^2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x^2 + 4\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2} \sqrt{1 + x^2} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (x + x^3) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2) + \frac{1}{4}(\beta^4 - \alpha^4) \\ &= \frac{1}{4}(\beta^2 - \alpha^2)(2 + \beta^2 + \alpha^2) \end{aligned}$$

【問題 33】線積分の計算演習（標高、勾配ベクトル）

xy 平面で表される土地があり、位置 (x, y) における標高が、

$$\Phi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

であるとする。

（注）すなわち、この土地の地形は原点を中心とする円錐状の窪地で、登り方向傾斜角が 45° である。

（1）勾配ベクトル

$$\nabla\Phi(x, y) = \left(\frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial y} \right)$$

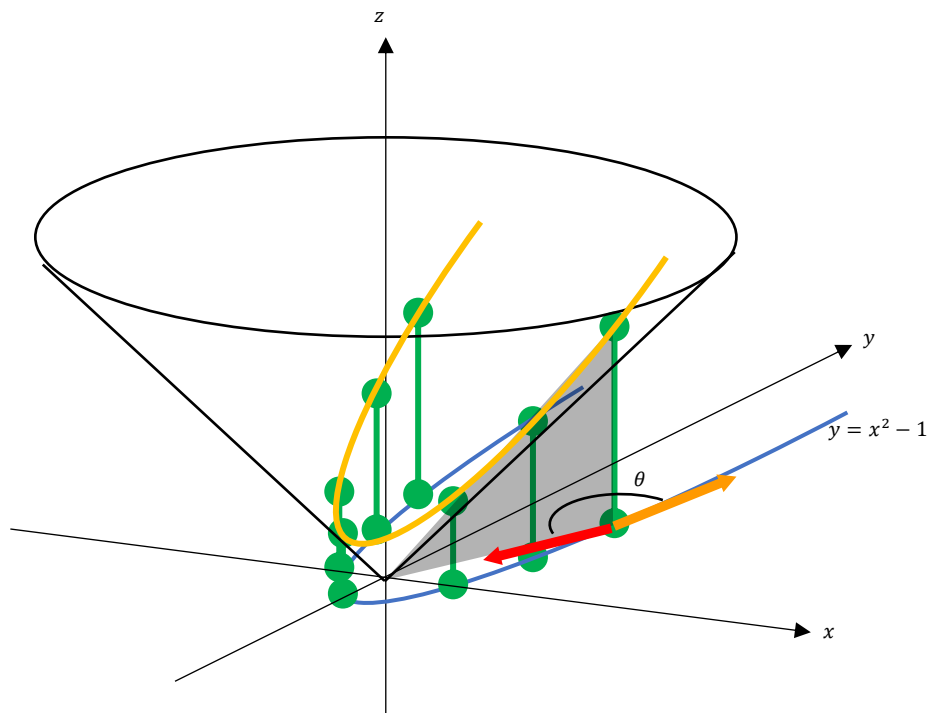
をもとめよ。

（注）勾配ベクトル $\nabla\Phi(x, y)$ とは、標高 $\Phi(x, y)$ のその位置における傾斜方向と傾斜角度を表すベクトル。

$\nabla\Phi(x, y)$ の方向が「坂の登りの方向」、 $\nabla\Phi(x, y)$ の大きさが「坂の傾斜（登り方向の傾斜角の正接）」を表す。（ ∇ はナブラと読む。 $\nabla\Phi(x, y)$ はベクトルであるが、習慣的に上に矢印はつけない。）

$$\begin{aligned} \nabla\Phi(x, y) &= \left(\frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial y} \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2}, \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2} \right) \\ &= \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x, y) \end{aligned}$$

以下、経路 C を、 $y = x^2 - 1$ の中の始点 $(\alpha, \alpha^2 - 1)$ 終点 $(\beta, \beta^2 - 1)$ の経路とする。



(2) 経路 C の接線方向ベクトル $\left(1, \frac{dy}{dx}\right)$ を求めよ。

$$\left(1, \frac{dy}{dx}\right) = \left(1, \frac{d}{dx}(x^2 - 1)\right) = (1, 2x)$$

(3) 上記(2)の接線方向ベクトル $\left(1, \frac{dy}{dx}\right)$ と、勾配ベクトルの逆向きのベクトル $-\nabla\Phi(x, y)$ (以下「下り勾配ベクトル」と呼ぶ。)のなす角を θ とすると、 $\cos\theta$ を x の式としてあらわせ。

$$\cos\theta = \frac{\left(1, \frac{dy}{dx}\right) \cdot (-\nabla\Phi(x, y))}{\left|\left(1, \frac{dy}{dx}\right)\right| |-\nabla\Phi(x, y)|}$$

$$= \frac{(1, 2x) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y)\right)}{\left|(1, 2x)\right| \left|-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y)\right|}$$

$$= \frac{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x+2xy)}{\sqrt{4x^2+1} \times 1}$$

$$= \frac{-x(1+2y)}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{4x^2+1}}$$

$y = x^2 - 1$ を代入すると、

$$\cos\theta = \frac{-x[1+2(x^2-1)]}{\sqrt{x^2+(x^2-1)^2}\sqrt{4x^2+1}}$$

$$= \frac{-x(2x^2-1)}{\sqrt{x^4-x^2+1}\sqrt{4x^2+1}}$$

(4) 上記(3)の下り勾配ベクトルの、接線方向成分 $|-\nabla\Phi(x, y)|\cos\theta$ を求めよ。

$$|-\nabla\Phi(x, y)|\cos\theta = \left|-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y)\right| \frac{-x(2x^2-1)}{\sqrt{x^4-x^2+1}\sqrt{4x^2+1}}$$

$$= 1 \times \frac{-x(2x^2-1)}{\sqrt{x^4-x^2+1}\sqrt{4x^2+1}}$$

$$= \frac{-x(2x^2-1)}{\sqrt{x^4-x^2+1}\sqrt{4x^2+1}}$$

(5) 上記(4)の下り勾配ベクトルの接線方向成分を、経路 C 上で線積分した値

$\int_C |\nabla \Phi(x, y)| \cos \theta \, dS$ を求めよ。(ヒント S は弧長であるから、 $\frac{dS}{dx} = \left| \left(1, \frac{dy}{dx} \right) \right|$)

S は弧長であるから、

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx = \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

したがって、

$$\begin{aligned} \int_C |\nabla \Phi(x, y)| \cos \theta \, dS &= \int_C \frac{-x(2x^2-1)}{\sqrt{x^4-x^2+1}\sqrt{4x^2+1}} \times \sqrt{1+4x^2} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{-2x^3-x}{\sqrt{x^4-x^2+1}} dx \\ &\quad (x^4-x^2+1=u \text{ とおくと、 } 4x^3-2x=\frac{du}{dx}, \text{ } u: \alpha^4-\alpha^2+1 \rightarrow \beta^4-\beta^2+1) \\ &= \int_{\alpha^4-\alpha^2+1}^{\beta^4-\beta^2+1} \frac{-2x^3-x}{\sqrt{u}} \frac{1}{4x^3-2x} du \\ &= - \int_{\alpha^4-\alpha^2+1}^{\beta^4-\beta^2+1} \frac{1}{2\sqrt{u}} du \\ &= -[\sqrt{u}]_{\alpha^4-\alpha^2+1}^{\beta^4-\beta^2+1} \\ &= \sqrt{\alpha^4-\alpha^2+1} - \sqrt{\beta^4-\beta^2+1} \end{aligned}$$

(6) 線積分 $\int_C \{-\nabla\Phi(x, y) \cdot (dx, dy)\}$ の値をもとめよ。

$$\begin{aligned}
 \int_C \{-\nabla\Phi(x, y) \cdot (dx, dy)\} &= - \int_C \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y) \cdot (dx, dy) \right\} \\
 &= - \int_C \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x dx + y dy) \right\} \\
 &= - \int_C \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx - \int_C \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dy \\
 &\quad (y = x^2 - 1, \text{ (よって } dy = 2x dx \text{) を代入}) \\
 &= - \int_C \frac{x}{\sqrt{x^4-x^2+1}} dx - \int_C \frac{x^2-1}{\sqrt{x^4-x^2+1}} 2x dx \\
 &= \int_C \frac{-2x^3-x}{\sqrt{x^4-x^2+1}} dx \\
 &\quad (\text{以下 (5) と同様}) \\
 &= \sqrt{\alpha^4 - \alpha^2 + 1} - \sqrt{\beta^4 - \beta^2 + 1}
 \end{aligned}$$

(7) 経路に沿って下った標高差、すなわち、 $-(\text{終点の標高} - \text{始点の標高})$

$$-\{\Phi(\beta, \beta^2 - 1) - \Phi(\alpha, \alpha^2 - 1)\}$$

を求めよ。

$$\begin{aligned}
 -\{\Phi(\beta, \beta^2 - 1) - \Phi(\alpha, \alpha^2 - 1)\} &= -\left\{ \sqrt{\beta^2 + (\beta^2 - 1)^2} - \sqrt{\alpha^2 + (\alpha^2 - 1)^2} \right\} \\
 &= \sqrt{\alpha^4 - \alpha^2 + 1} - \sqrt{\beta^4 - \beta^2 + 1}
 \end{aligned}$$

(注) 上記 (5) および (6) では、「下り勾配ベクトルの進行方向成分」を「進行方向」に向かって積分したのであるから、計算結果は自ずと「経路に沿って下った標高差」と一致する。

(注) つまり計算結果は、始点と終点の標高差のみで決定されるのであって、

積分の計算を行わなくても結果は容易にわかる。

始点と終点が同じであれば、いかなる経路を辿ったかに依らず、計算結果は同じである。

(8) 経路 d を、 $y = 3x^2 + 2x + 1 + \sin x + e^x$ ($1 \leq x \leq 2$) として、線積分

$$\int_d \{-\nabla \Phi(x, y) \cdot (dx, dy)\}$$

の値をもとめよ。(解答は計算結果のみでよい。)

始点と終点の標高差より算出する。

始点の標高が

$$\Phi(1, 3 \times 1^2 + 2 \times 1 + 1 + \sin 1 + e^1) = \Phi(1, 6 + \sin 1 + e) = \sqrt{1 + (6 + \sin 1 + e)^2}$$

終点の標高が

$$\Phi(2, 3 \times 2^2 + 2 \times 2 + 1 + \sin 2 + e^2) = \Phi(2, 17 + \sin 2 + e^2) = \sqrt{4 + (17 + \sin 2 + e^2)^2}$$

であるので、

$$\int_d \{-\nabla \Phi(x, y) \cdot (dx, dy)\} = \sqrt{1 + (6 + \sin 1 + e)^2} - \sqrt{4 + (17 + \sin 2 + e^2)^2}$$

(9) t を媒介変数とする螺旋状の経路 d があり $(x, y) = t(\cos t, \sin t)$ ($\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$) で

ある。このとき線積分

$$\int_d \{-\nabla \Phi(x, y) \cdot (dx, dy)\}$$

の値をもとめよ。(解答は計算結果のみでよい。)

始点と終点の標高差より算出する。

始点の標高が

$$\Phi\left(\frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{12}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{12}\right)^2} = \frac{\pi}{6}$$

終点の標高が

$$\Phi\left(\frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3}\right) = \Phi\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}\pi}{6}\right) = \sqrt{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{6}\right)^2} = \frac{\pi}{3}$$

であるので、

$$\int_d \{-\nabla \Phi(x, y) \cdot (dx, dy)\} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$$

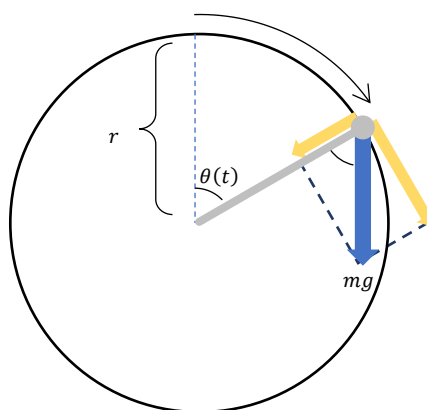
【問題 34】線積分の計算演習（振り子）

以下【問題 31】エネルギー、仕事量の計算（振り子）を参照のこと

長さ r （質量は 0）の固い棒が、一方の端点が固定されて中心となり、鉛直面の中を回転する。もう一方の端点には質量 m の物体が取り付けられている。

時刻 0 のとき、物体が回転中心の真上の位置で静止していたが、わずかに力を加えると静かに動き始めた。

重力加速度を g として、以下の問いに答えよ。



(1) 経路 C を、媒介変数 φ を用いて

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \\ y = r \cos \varphi \end{cases} \quad (0 \leq \varphi \leq \theta)$$

とする。(ただし $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)

また、物体に作用する力は定ベクトル $\vec{F}(x, y) = (0, -mg)$ である。

このとき、 $\int_C \vec{F}(x, y) \cdot (dx, dy)$ を求めよ。

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}(x, y) \cdot (dx, dy) &= \int_C (0, -mg) \cdot (dx, dy) \\ &= \int_C (0 \, dx, -mg \, dy) \\ &= -mg \int_C dy \\ &\quad (y = r \cos \varphi \text{ より、} dy = -r \sin \varphi \, d\varphi, \, 0 \leq \varphi \leq \theta \text{ なので}) \\ &= mgr \int_0^\theta \sin \varphi \, d\varphi \\ &= mgr [-\cos \varphi]_0^\theta \\ &= mgr(1 - \cos \theta) \\ &= 2mgr \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

(2) 始点の鉛直方向の高さと終点の鉛直方向の高さの差を求め、それに mg を乗じた値を求めよ。

回転中心の高さを0とすると、

始点の鉛直方向の高さ r

終点の鉛直方向の高さ $r \cos \theta$

であり、その差は

$$r(1 - \cos \theta)$$

である。したがって、それに mg を乗じた値は、

$$mgr(1 - \cos \theta) = 2mgr \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

である。

(3) 角度 θ の時の速度を $\vec{v}_\theta$ とすると、 $\frac{1}{2}m|\vec{v}_\theta|^2 = \int_c \vec{F}(x, y) \cdot (dx, dy)$ が成り立つ。

このことから、 $|\vec{v}_\theta|$ を求めよ。

上記(1)より

$$\int_c \vec{F}(x, y) \cdot (dx, dy) = 2mgr \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

であるので、

$$\frac{1}{2}m|\vec{v}_\theta|^2 = 2mgr \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

これより、

$$|\vec{v}_\theta| = 2\sqrt{gr} \sin \frac{\theta}{2}$$

【問題 35】線積分の計算演習（万有引力）

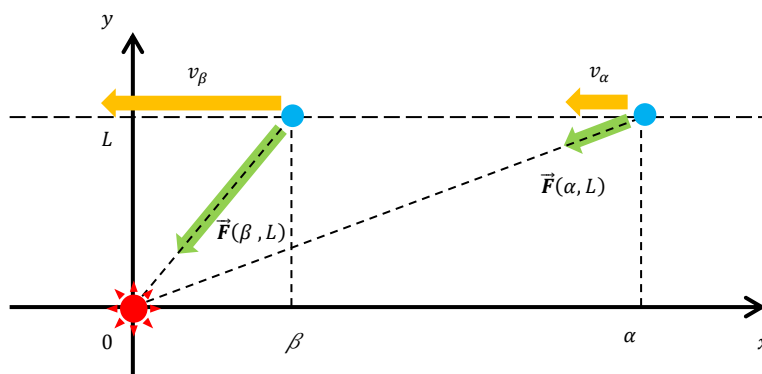
xy 平面上で、質量 m 、位置 (x, y) の物体に作用する力が、

$$\vec{F}(x, y) = -\frac{GmM}{x^2+y^2} \times \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

であるとする。（ G 、 M は定数。）

ある質量 m の物体が、半直線 $y = L, 0 < x$ の上を運動する。（ L は定数。）

位置 (α, L) における速度を $(v_\alpha, 0)$ 、位置 (β, L) における速度を $(v_\beta, 0)$ とする。



(1) $\vec{F}(x, y)$ の運動方向成分を運動経路上で線積分することにより $\frac{1}{2}mv_\beta^2 - \frac{1}{2}mv_\alpha^2$ を求めよ。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_\beta^2 - \frac{1}{2}mv_\alpha^2 &= \int_C \vec{F}(x, y) \cdot (dx, dy) = \int_C \left\{ -\frac{GmM}{x^2+y^2} \times \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \right\} \cdot (dx, dy) \\ &\quad (y = L, \frac{dy}{dx} = 0 \text{ より } dy = 0) \\ &= \int_C \left\{ -\frac{GmM}{x^2+L^2} \times \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}}, \frac{L}{\sqrt{x^2+L^2}} \right) \right\} \cdot (dx, 0) = -GmM \int_\alpha^\beta \frac{x}{(x^2+L^2)^{\frac{3}{2}}} dx \\ &\quad \left(x = L \tan \theta \text{ とおく。 } dx = \frac{L}{\cos^2 \theta} d\theta, \theta : \delta \rightarrow \gamma \text{ ただし } \begin{cases} \alpha = L \tan \delta \\ \beta = L \tan \gamma \end{cases} \right) \\ &= -GmM \int_\delta^\gamma \frac{L \tan \theta}{\{L^2(1+\tan^2 \theta)\}^{\frac{3}{2}}} \frac{L}{\cos^2 \theta} d\theta = -GmM \int_\delta^\gamma \frac{\frac{L \sin \theta}{\cos \theta}}{\left(L^2 \frac{1}{\cos^2 \theta}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{L}{\cos^2 \theta} d\theta = -GmM \int_\delta^\gamma \frac{\sin \theta}{L} d\theta \\ &= -\frac{GmM}{L} [-\cos \theta]_\delta^\gamma = \frac{GmM}{L} (\cos \gamma - \cos \delta) \\ &\quad \left(\begin{cases} \alpha = L \tan \delta \\ \beta = L \tan \gamma \end{cases} \text{ より } \begin{cases} \cos \delta = \frac{L}{\sqrt{\alpha^2+L^2}} \\ \cos \gamma = \frac{L}{\sqrt{\beta^2+L^2}} \end{cases} \right) \\ &= \frac{GmM}{L} \left(\frac{L}{\sqrt{\beta^2+L^2}} - \frac{L}{\sqrt{\alpha^2+L^2}} \right) \\ &= GmM \left(\frac{1}{\sqrt{\beta^2+L^2}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+L^2}} \right) \end{aligned}$$

(2) 上記(1)において、 $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\frac{1}{2}mv_{\beta}^2 - \frac{1}{2}mv_{\alpha}^2)$ の値を求めよ。

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\frac{1}{2}mv_{\beta}^2 - \frac{1}{2}mv_{\alpha}^2) &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left\{ GmM \left(\frac{1}{\sqrt{\beta^2 + L^2}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + L^2}} \right) \right\} \\ &= \frac{GmM}{\sqrt{\beta^2 + L^2}} \end{aligned}$$

(3) 上記(2)の極限値を m で除した値を $\Phi(\beta)$ とおく。このとき、

$$\frac{1}{2}mv_{\beta}^2 - \frac{1}{2}mv_{\alpha}^2 = m\{\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)\}$$

であることを示せ。

$$\Phi(\beta) = \frac{GM}{\sqrt{\beta^2 + L^2}} \text{なので、}$$

$$m\{\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)\} = m \left(\frac{GM}{\sqrt{\beta^2 + L^2}} - \frac{GM}{\sqrt{\alpha^2 + L^2}} \right)$$

これは(1)の

$$\frac{1}{2}mv_{\beta}^2 - \frac{1}{2}mv_{\alpha}^2 = GmM \left(\frac{1}{\sqrt{\beta^2 + L^2}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + L^2}} \right)$$

と一致する。

(4) $\Phi(x, y) = -\frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ とおく。このとき、 $\vec{F}(x, y) = -m\nabla\Phi(x, y)$ であることを示せ。

$$\begin{aligned} -m\nabla\Phi(x, y) &= -m \left(\frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial y} \right) = -m \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right) = GmM \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= GmM \left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \times 2x, -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \times 2y \right) \\ &= -\frac{GmM}{x^2 + y^2} \times \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \end{aligned}$$

なので、これは $\vec{F}(x, y)$ と一致する。

【解説 11】ポテンシャル場、エネルギー

一

数学的定義

ポテンシャル場

空間上の位置ごとに、その位置にある物体に作用する力が定まる場合、そのような空間を「ポテンシャル場」という。（「位置エネルギー場」あるいは単に「場」と呼ぶこともある。）

位置 $\vec{x}$ の物体に作用する「単位質量当たりの」ポテンシャルを $\Phi(\vec{x})$ で表す。

質量 m 、重心位置 $\vec{x}$ の物体 A に作用する力は、

$$\vec{F}(\vec{x}) = -m\nabla\Phi(\vec{x})$$

であり、物体に作用する力は、その物体の質量とポテンシャル場の下り勾配ベクトルの積である。

（注）物体が同じ位置にあるからといって、いつもいつも同じ力が作用するとは限らない。しかし、もし「位置」のみで力が決定されるのであれば、ポテンシャル場として取り扱うことができる、ということである。

（注）ポテンシャル場は空間上のスカラー関数であって、ある種の標高のようなものである。物体は坂を下る方向に力を受け、その力の大きさは坂の傾斜に比例する。

（注）なぜ「単位質量当たり」なのかというと、物体に作用する力はその物体の質量に比例する場合が多いので、そうしたほうが計算に比較的都合がよいからである。

無論そうでない場合もある。例えばバネの復元力は変位長のみで定まり、物体の質量には影響されない。（とはいえこのような場合でも、その物体に限定して考えるならば「場」として取り扱うことは可能である。）

数学的定義

n 次元空間における運動エネルギー

物体がある経路 c で運動するとき、物体に作用する力の運動方向成分の積分値

$$\int_c |\vec{F}(\vec{x})| \cos \theta dS \quad (\theta \text{ は運動方向と下り勾配ベクトルのなす角, } S \text{ は弧長})$$

をその物体の運動エネルギー（の増加）という。

数学定理

運動エネルギーと質量・速さとの関係

運動エネルギー（の増加）は、質量と速さの 2 乗の積の半分（の増加）と等しい。

$$\frac{1}{2} m |\vec{v}(t_1)|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}(t_0)|^2 = \int_c |\vec{F}(\vec{x})| \cos \theta dS$$

(t_0 は経路 C の始点における時刻、 t_1 は経路 C の終点における時刻)

数学定理

n 次元空間における運動エネルギー・・・【ポテンシャル場の場合】

もし物体がポテンシャル場の中を運動するのであれば、

運動エネルギー（の増加）は、ポテンシャルと質量の積（の減少）と等しい。

$$\int_c |\vec{F}(\vec{x})| \cos \theta dS = -m\Phi(\vec{\beta}) + m\Phi(\vec{\alpha}) \quad (\vec{\alpha} \text{ は経路 } C \text{ の始点, } \vec{\beta} \text{ は経路 } C \text{ の終点})$$

数学定理

運動エネルギーと質量・速さとの関係・・・【ポテンシャル場の場合】

もし物体がポテンシャル場の中を運動するのであれば、

質量と速さの 2 乗の積の半分（の増加）は、ポテンシャルと質量の積（の減少）と等しい。

$$\frac{1}{2} m |\vec{v}(t_1)|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}(t_0)|^2 = -m\Phi(\vec{\beta}) + m\Phi(\vec{\alpha})$$

したがって

$$\frac{1}{2} |\vec{v}(t_1)|^2 - \frac{1}{2} |\vec{v}(t_0)|^2 = -\Phi(\vec{\beta}) + \Phi(\vec{\alpha})$$

(注) ポテンシャルは「場の標高」のようなものと理解してよいが、どこが標高 0 なのかは任意であって、絶対的な標高が存在しているわけではない。

取り扱うことができるのは、標高の「差」だけである。

エネルギーも同様であり、取り扱うことができるのはエネルギーの「差」だけであって、エネルギーに絶対的な値を考えることは無意味である。

例えば位置エネルギーはどこを高さ 0 にするかによって変わるし、運動エネルギーも $\frac{1}{2}mv^2$ という絶対的な（正の）物理量が存在しているわけではない。

【問題 36】ポテンシャル場の具体例

空間のポテンシャル場 $\Phi(\vec{x})$ が次の関数で与えられているとき、質量 m 、位置 $\vec{x}$ の物体に作用する力 $\vec{F}(\vec{x})$ を求めよ。

また、各問で与えられた条件により、物体の速さ（速度の絶対値）を求めよ。

(1) 無重力空間

$$\Phi(\vec{x}) = C \quad (C \text{ は定数})$$

速さ・・・位置 $(1, 2, 3)$ における速度を $|\vec{v}_0|$ とするときの、

位置 $(4, 5, 6)$ における速さ $|\vec{v}((4, 5, 6))|$

$$\vec{F}(\vec{x}) = -m\nabla\Phi(\vec{x}) = -m\left(\frac{\partial\Phi(\vec{x})}{\partial x}, \frac{\partial\Phi(\vec{x})}{\partial y}, \frac{\partial\Phi(\vec{x})}{\partial z}\right) = -m\left(\frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial C}{\partial y}, \frac{\partial C}{\partial z}\right) = \vec{0}$$

$$\frac{1}{2}m|\vec{v}((4, 5, 6))|^2 - \frac{1}{2}m|\vec{v}_0|^2 = -m\Phi((4, 5, 6)) + m\Phi((1, 2, 3)) = -mC + mC = 0$$

これより、

$$|\vec{v}((4, 5, 6))| = |\vec{v}_0|$$

(2) 重力場（地上付近）

$$\Phi(x, y, z) = gz + C \quad (g \text{ は正の定数、} C \text{ は定数})$$

速さ・・・位置 $(1, 2, 3)$ における速度を $|\vec{v}_0|$ とするときの、

位置 $(4, 5, 6)$ における速さ $|\vec{v}((4, 5, 6))|$

$$\vec{F}(x, y, z) = -m\nabla\Phi(x, y, z) = -m\left(\frac{\partial\Phi(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial\Phi(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial\Phi(x, y, z)}{\partial z}\right)$$

$$= -m\left(\frac{\partial}{\partial x}(gz + C), \frac{\partial}{\partial y}(gz + C), \frac{\partial}{\partial z}(gz + C)\right) = (0, 0, -mg)$$

$$\frac{1}{2}m|\vec{v}((4, 5, 6))|^2 - \frac{1}{2}m|\vec{v}_0|^2 = -m\Phi((4, 5, 6)) + m\Phi((1, 2, 3)) = -m(6g + C) + m(3g + C) = -3mg$$

これより、

$$|\vec{v}((4, 5, 6))| = \sqrt{|\vec{v}_0|^2 - 6g}$$

(3) 重力場 (万有引力)

$$\Phi((x, y, z)) = -\frac{GM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + C \quad (G, M \text{ は正の定数、} C \text{ は定数})$$

なお、原点(0, 0, 0)は空間から除外する。

速さ・・・位置(1, 2, 3)における速度を $|\vec{v}_0|$ とするときの、

位置(4, 5, 6)における速さ $|\vec{v}((4, 5, 6))|$

$$\vec{F}((x, y, z)) = -m\nabla\Phi((x, y, z)) = -m\left(\frac{\partial\Phi((x, y, z))}{\partial x}, \frac{\partial\Phi((x, y, z))}{\partial y}, \frac{\partial\Phi((x, y, z))}{\partial z}\right)$$

$$= -m\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{GM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + C\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{GM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + C\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{GM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + C\right)\right) = \frac{m(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{1}{2}m|\vec{v}((4, 5, 6))|^2 - \frac{1}{2}m|\vec{v}_0|^2 = -m\Phi((4, 5, 6)) + m\Phi((1, 2, 3))$$

$$= -m\left(-\frac{GM}{\sqrt{4^2+5^2+6^2}} + C\right) + m\left(-\frac{GM}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} + C\right) = -GmM\left(\frac{1}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt{77}}\right)$$

これより、

$$|\vec{v}((4, 5, 6))| = \sqrt{|\vec{v}_0|^2 - 2GM\left(\frac{1}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt{77}}\right)}$$

(4) 単振動

$$\Phi(x) = \frac{k}{2m}x^2 + C \quad (k \text{ は正の定数、} m \text{ は物体の質量、} C \text{ は定数})$$

速さ・・・位置 3 における速度を $|v_0|$ とするとき、位置 5 における速さ $|v(5)|$

$$F(x) = -m\nabla\Phi(x) = -m \frac{d\Phi(x)}{dx} = -m \frac{d}{dx} \left(\frac{k}{2m}x^2 + C \right) = -kx$$

$$\frac{1}{2}m|v(5)|^2 - \frac{1}{2}m|v_0|^2 = -m\Phi(5) + m\Phi(3) = -m \left(\frac{k}{2m}5^2 + C \right) + m \left(\frac{k}{2m}3^2 + C \right) = -8k$$

これより、

$$|v(5)| = \sqrt{|v_0|^2 - \frac{16k}{m}}$$

(5) 振り子

$$\Phi(x) = gr \cos \frac{x}{r} + C \quad (0 \leq x \leq \pi r, g, r \text{ は正の定数、} C \text{ は定数})$$

速さ・・・位置 0 における速度を 0 とするとき、位置 X における速さ $|v(X)|$

$$F(x) = -m\nabla\Phi(x) = -m \frac{d\Phi(x)}{dx} = -m \frac{d}{dx} \left(gr \cos \frac{x}{r} + C \right) = mg \sin \frac{x}{r}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m|v(X)|^2 - \frac{1}{2}m|0|^2 &= -m\Phi(X) + m\Phi(0) = -m \left(gr \cos \frac{X}{r} + C \right) + m \left(gr \cos \frac{0}{r} + C \right) \\ &= mgr \left(1 - \cos \frac{X}{r} \right) = 2mgr \sin^2 \frac{X}{2r} \end{aligned}$$

これより、

$$|v(X)| = 2\sqrt{gr} \sin \frac{X}{2r}$$

【問題 37】ポテンシャル場の利用($\Phi = -\frac{1}{xyz}$)

xyz 立体空間上で、位置 (x, y, z) (ただし $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$) において質量 m の物体に作用する力が、

$$\vec{F}((x, y, z)) = -m \left(\frac{1}{x^2yz}, \frac{1}{xy^2z}, \frac{1}{xyz^2} \right)$$

であるとする。

この物体が初期位置 $(1, 2, 3)$ において速さ 1 であったとする。

位置 $(4, 5, 6)$ まで移動したときの、この物体の速さを求めよ。

$$\vec{F}((x, y, z)) = -m \nabla \Phi((x, y, z)) = -m \left(\frac{\partial \Phi((x, y, z))}{\partial x}, \frac{\partial \Phi((x, y, z))}{\partial y}, \frac{\partial \Phi((x, y, z))}{\partial z} \right) = -m \left(\frac{1}{x^2yz}, \frac{1}{xy^2z}, \frac{1}{xyz^2} \right)$$

であり、すなわち
$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi((x, y, z))}{\partial x} = \frac{1}{x^2yz} \\ \frac{\partial \Phi((x, y, z))}{\partial y} = \frac{1}{xy^2z} \\ \frac{\partial \Phi((x, y, z))}{\partial z} = \frac{1}{xyz^2} \end{cases} \quad \text{であるので、}$$

第 1 式より

$$\Phi((x, y, z)) = \int \frac{1}{x^2yz} dx = \frac{1}{yz} \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{yz} \left(-\frac{1}{x} \right) + C(y, z) = -\frac{1}{xyz} + C(y, z) \quad (C(y, z) \text{ は } y \text{ と } z \text{ の関数})$$

これを第 2 式に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{xyz} + C(y, z) \right) = \frac{1}{xy^2z}$$

$$\frac{1}{xy^2z} + \frac{\partial}{\partial y} C(y, z) = \frac{1}{xy^2z}$$

よって $\frac{\partial}{\partial y} C(y, z) = 0$ であるから、 $C(y, z)$ は z のみの関数であるので、 $C(y, z) = D(z)$ とおくと

$$\Phi((x, y, z)) = -\frac{1}{xyz} + D(z)$$

これを第 3 式に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{xyz} + D(z) \right) = \frac{1}{xyz^2}$$

$$\frac{1}{xyz^2} + \frac{\partial}{\partial z} D(z) = \frac{1}{xyz^2}$$

よって $\frac{\partial}{\partial z} D(z) = 0$ であるから、 $D(z)$ は定数。これをあらためて C と書いて、

$$\Phi((x, y, z)) = -\frac{1}{xyz} + C$$

を得る。したがって、

$$\frac{1}{2} m |\vec{v}((4, 5, 6))|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}((1, 2, 3))|^2 = -m \Phi((4, 5, 6)) + m \Phi((1, 2, 3))$$

$$\frac{1}{2} m |\vec{v}((4, 5, 6))|^2 - \frac{1}{2} m \times 1^2 = -m \left(-\frac{1}{4 \times 5 \times 6} + C \right) + m \left(-\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + C \right)$$

これを解いて

$$|\vec{v}((4, 5, 6))| = \frac{\sqrt{615}}{30}$$

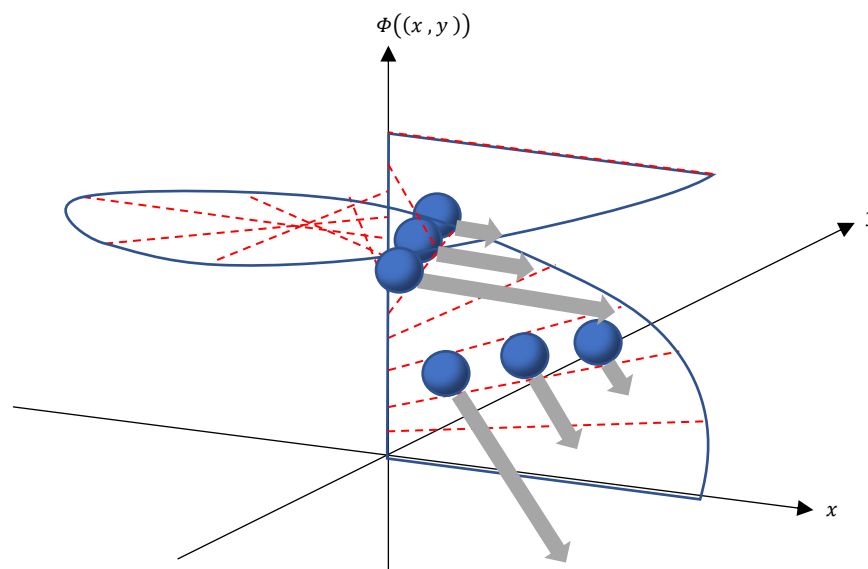
【問題 38】ポテンシャル場の利用（螺旋）

xy 平面上で、ポテンシャル場が

$$\Phi((x, y)) = \theta \quad (\text{ただし } \theta \text{ は、} (x, y) \text{ の偏角とする。 (単位は rad、} 0 \leq \theta \leq 2\pi))$$

で与えられている。

(1) 位置 (x, y) にある質量 m の物体が受ける力 $\vec{F}((x, y))$ を求めよ。



$$\Phi((x, y)) = \theta \quad \text{より} \quad \begin{cases} \cos\Phi((x, y)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\Phi((x, y)) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

また、

$$\frac{\partial \cos\Phi((x, y))}{\partial x} = \frac{\partial \cos\Phi((x, y))}{\partial \Phi((x, y))} \frac{\partial \Phi((x, y))}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \cos\Phi((x, y))}{\partial x} = -\sin\Phi((x, y)) \frac{\partial \Phi((x, y))}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial \Phi((x, y))}{\partial x}$$

であるから、

$$\frac{\partial \Phi((x, y))}{\partial x} = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

同様に

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sin \Phi((x, y))}{\partial y} &= \frac{\partial \sin \Phi((x, y))}{\partial \Phi((x, y))} \frac{\partial \Phi((x, y))}{\partial y} \\ \frac{\partial \sin \Phi((x, y))}{\partial y} &= \cos \Phi((x, y)) \frac{\partial \Phi((x, y))}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial \Phi((x, y))}{\partial y}\end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{\partial \Phi((x, y))}{\partial y} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - y \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

以上より、

$$\vec{F}((x, y)) = -m \nabla \Phi((x, y)) = -m \left(\frac{\partial \Phi((x, y))}{\partial x}, \frac{\partial \Phi((x, y))}{\partial y} \right) = m \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, -\frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

別解

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Phi((x, y))}{\partial x} &= \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\left(\frac{\partial \cos \theta}{\partial x} \right)}{\left(\frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} \right)} = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)}{(-\sin \theta)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} \right)}{\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial \Phi((x, y))}{\partial y} &= \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\left(\frac{\partial \sin \theta}{\partial y} \right)}{\left(\frac{\partial \sin \theta}{\partial \theta} \right)} = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)}{\cos \theta} = \frac{\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - y \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} \right)}{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)} = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{aligned} \right.$$

(2) $|(x, y)| = r$ とするとき、 $\vec{F}((x, y))$ を m 、 r 、 θ の関数として表せ。
また、 $|\vec{F}((x, y))|$ 、 $\vec{F}((x, y))$ の偏角を求めよ。

$$\begin{aligned}\vec{F}((x, y)) &= m \left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2} \right) \\ &= m \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \\ &= \frac{m}{r} (\sin \theta, -\cos \theta)\end{aligned}$$

$$|\vec{F}((x, y))| = \frac{m}{r}$$

$$\vec{F}((x, y)) = \frac{m}{r} (\sin \theta, -\cos \theta) = \frac{m}{r} \left(\cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right), \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad \text{より} \quad \vec{F}((x, y)) \quad \text{の偏角は} \quad \theta - \frac{\pi}{2}$$

(3) この物体が初期位置 $(1, 1)$ において速さ $\sqrt{\pi}$ であったとする。
位置 $(2, 4 - 2\sqrt{3})$ まで移動したときの、この物体の速さを求めよ。

$$\begin{cases} \cos \phi((1, 1)) = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \phi((1, 1)) = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{より、} \quad \phi((1, 1)) = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} \cos \phi((2, 4 - 2\sqrt{3})) = \frac{2}{\sqrt{2^2+(4-2\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin \phi((2, 4 - 2\sqrt{3})) = \frac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{2^2+(4-2\sqrt{3})^2}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}} = \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases} \quad \text{より、} \quad \phi((2, 4 - 2\sqrt{3})) = \frac{\pi}{12}$$

したがって、

$$\frac{1}{2} m |\vec{v}((2, 4 - 2\sqrt{3}))|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}((1, 1))|^2 = -m\phi((2, 4 - 2\sqrt{3})) + m\phi((1, 1))$$

$$\frac{1}{2} |\vec{v}((2, 4 - 2\sqrt{3}))|^2 - \frac{1}{2} \sqrt{\pi}^2 = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}$$

$$|\vec{v}((2, 4 - 2\sqrt{3}))|^2 = \frac{4\pi}{3}$$

$$|\vec{v}((2, 4 - 2\sqrt{3}))| = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$$

【解説 12】 力学的エネルギー保存法則

数学的定義

ポテンシャルエネルギー

ある物体系において、物体 A の運動エネルギーを「(物体 A の) ポテンシャルエネルギー」あるいは「(物体 A の) 位置エネルギー」と呼ぶ。

(注) エネルギーに「絶対的な値」は存在しない。どこをエネルギー0 とするかは任意であり、お互いの「差」のみが意味を持つことに注意。

数学的定義

力学的エネルギー保存法則

もし「(物体 A の) 運動エネルギー」と「(物体 A の) ポテンシャルエネルギー」が保存されるならば（両者の和が一定であるならば）、その保存法則のことを「力学的エネルギー保存法則」という。

(注) 運動エネルギーを K 、ポテンシャルエネルギーを U と記し、

$$K + U = E$$

と表されることが一般的である。

E （運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和）を「力学的エネルギー」と呼ぶ。

(注) 「力学的エネルギー保存法則」は普遍的に成立する物理法則ではない。成り立つこともあれば成り立たないこともある。

(例：非弾性衝突の場合、「力学的エネルギー保存法則」は成り立たない。)

(注) 熱力学第一法則でいう「エネルギー保存法則」は、「力学的エネルギー保存法則」とは異なり、普遍的に成立する物理法則である。運動エネルギー、ポテンシャルエネルギーに加え「熱エネルギー」までを算入すれば、それらの和は必ず一定である。

数学定理

ポテンシャル場

空間上の位置ごとに、その位置にある物体に作用する力が定まる場合、そのような空間を「ポテンシャル場」と呼ぶのであった。

このとき、その空間を一つの物体 A^C と考えると、物体 A が空間たる A^C から「受けた仕事量」が運動エネルギー（の増加）であるのだが、物体 A が空間たる A^C に「与えた仕事量」をポテンシャルエネルギー（の減少）と捉えれば、おのずと力学的エネルギー保存法則が成立する。

（注）一般に「ポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）」という用語を用いる場合、ポテンシャル場を想定していることが多い。

ボール A とボール B の弾性衝突において、ボール B の運動エネルギーのことを「ボール A のポテンシャルエネルギー」とはあまり言わない。

【問題 39】 力学的エネルギー保存法則とポテンシャル場

物体に作用する力が、物体の位置の関数として一意に定まっている場合（言い換えるとポテンシャル場が存在する場合）について考える。

ポテンシャル場を $\Phi(\vec{x})$ とし、質量 m の物体 A が経路 C （始点 $\vec{\alpha}$ 、終点 $\vec{\beta}$ ）上を運動するとする。

このとき、物体 A が物体 A^c から受けた仕事量を K 、物体 A が物体 A^c に与えた仕事用（すなわち場が物体 A から受けた仕事量）を U とすると、 $K + U = 0$ は定数であることを示せ。

なお、物体系は慣性系であることを前提とする。

まず、

$$K = \int_C (-m\nabla\Phi(\vec{x})) \cdot (dx, dy) = -m\Phi(\vec{\beta}) + m\Phi(\vec{\alpha})$$

である。

また、物体系が慣性系であることから、作用・反作用の法則より A^c が受ける力が

$$-(-m\nabla\Phi(\vec{x})) = m\nabla\Phi(\vec{x})$$

であることに注意すると、

$$U = \int_C m\nabla\Phi(\vec{x}) \cdot (dx, dy) = m\Phi(\vec{\beta}) - m\Phi(\vec{\alpha})$$

である。

したがって、 $K + U = 0$ が成り立つ。

【解説 13】 物体の衝突

次のような、2つの物体の衝突を考える。

物体A 質量 m 、衝突前の速度 $\vec{v}_0$ 、衝突後の速度 $\vec{v}_1$

物体B 質量 M 、衝突前の速度 $\vec{V}_0$ 、衝突後の速度 $\vec{V}_1$

このとき運動量保存則より

$$m\vec{v}_1 + M\vec{V}_1 = m\vec{v}_0 + M\vec{V}_0$$

は必ず成立している。

数学的定義

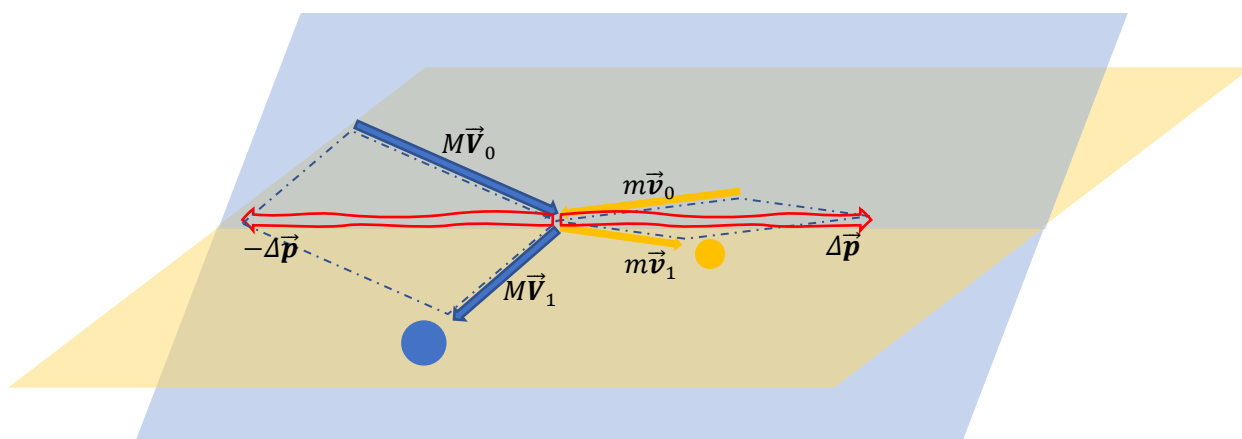
衝突運動量

運動量保存則より

$$m(\vec{v}_1 - \vec{v}_0) = -M(\vec{V}_1 - \vec{V}_0) \quad (= \Delta \vec{p} \text{ とする。})$$

である。

$\Delta \vec{p}$ は、衝突により物体Bが物体Aに与えた（=物体Aが物体Bから受けた）運動量であり、これを「(物体Bから物体Aへの) 衝突運動量」と呼ぶことにする。



なお以下において、 $\Delta \vec{p} \neq \vec{0}$ を前提とする。

($\Delta \vec{p} = \vec{0}$ の場合は衝突していないことと同義であるから考察の対象から除外する。)

数学的定義

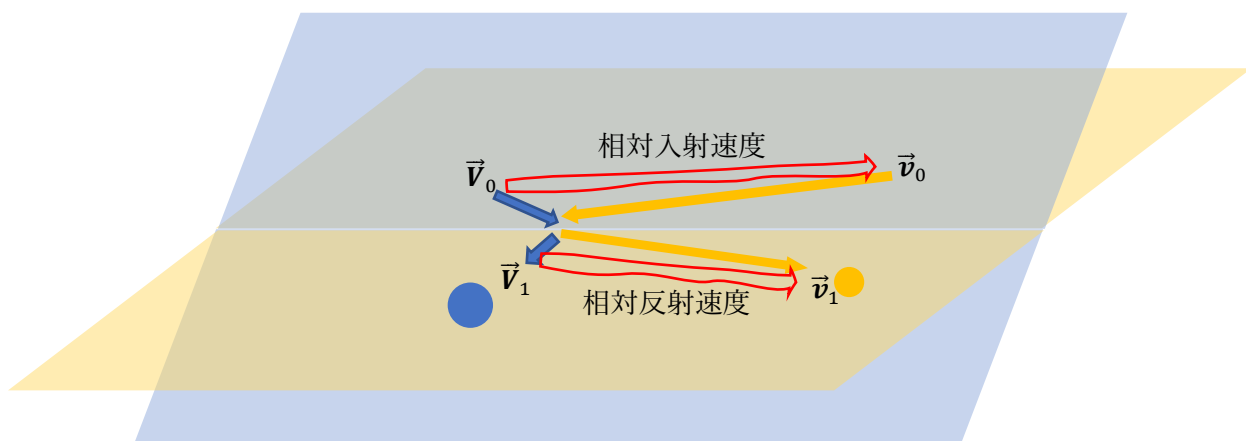
相対入射速度、相対反射速度、相対加速

$-(\vec{v}_0 - \vec{V}_0) = \vec{V}_0 - \vec{v}_0$ を、「(物体Bから見た物体Aの) 相対入射速度」

$\vec{v}_1 - \vec{V}_1$ を、「(物体Bから見た物体Aの) 相対反射速度」

と呼ぶことにする。

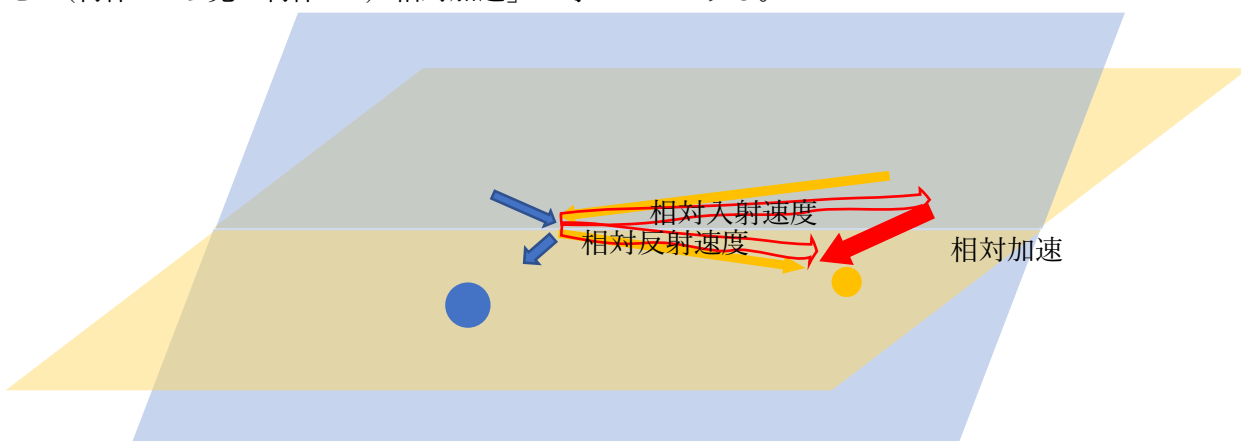
(注) 計算の便宜上、「相対入射速度」は実際の相対速度の逆ベクトルとしてある。



また、相対反射速度と相対入射速度の差

$$(\vec{v}_1 - \vec{V}_1) - (\vec{V}_0 - \vec{v}_0)$$

を「(物体Bから見た物体Aの) 相対加速」と呼ぶことにする。



(例) 「相対加速」が $\vec{0}$ なら、物体Bから見た物体Aは、もともと入射してきた方向に向かって、同じ速さで反射している。

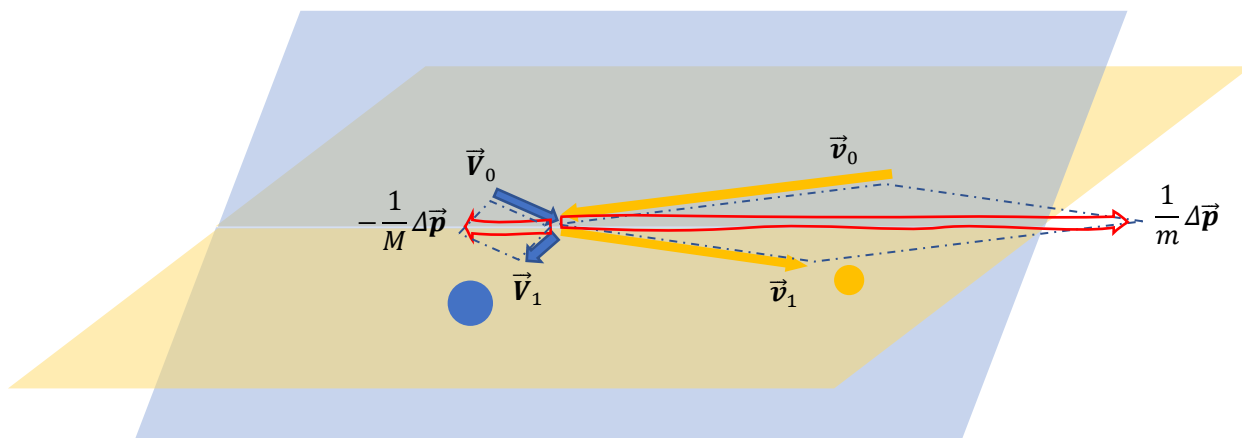
一般的には衝突は減速を引き起こすので、「相対加速」は負である。(「衝突運動量」と「相対加速」は逆向きである。)

数学定理

衝突運動量と、相対入射速度、相対反射速度の関係

衝突運動量と、相対入射速度、相対反射速度には次の関係が成立する。

$$\Delta \vec{p} = \frac{mM}{m+M} \{(\vec{V}_0 - \vec{v}_0) + (\vec{v}_1 - \vec{V}_1)\}$$



→ 【問題 41】 衝突運動量と、相対入射速度、相対反射速度の関係

数学定理

衝突と運動エネルギー、相対速度の関係

もし衝突の前後で運動エネルギーが減少する（か等しい）ならば、すなわち

$$\frac{1}{2}m|\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2}M|\vec{V}_1|^2 \leq \frac{1}{2}m|\vec{v}_0|^2 + \frac{1}{2}M|\vec{V}_0|^2$$

が成立するならば、

$$\Delta \vec{p} \cdot \{(\vec{v}_1 - \vec{V}_1) - (\vec{V}_0 - \vec{v}_0)\} \leq 0$$

が成立する。

つまり衝突運動量と相対加速の内積は 0 以下である。

衝突運動量と相対加速のなす角が鈍角であるとき、衝突による減速が発生している。（これを非弾性衝突という。）

衝突運動量と相対加速のなす角が 0、もしくは相対加速が $\vec{0}$ であるとき、衝突による減速は発生していない。（これを弾性衝突という。）

数学定理

相対的な減速と、運動エネルギー

$\Delta \vec{p} = \frac{mM}{m+M} \{(\vec{V}_0 - \vec{v}_0) + (\vec{v}_1 - \vec{V}_1)\}$ であったことを考えると、

$$|\vec{v}_1 - \vec{V}_1| \leq |\vec{V}_0 - \vec{v}_0|$$

が成立する。

つまり、衝突によって相対速度の絶対値は等しいかまたは減少する。

等号は

$$\frac{1}{2}m|\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2}M|\vec{V}_1|^2 = \frac{1}{2}m|\vec{v}_0|^2 + \frac{1}{2}M|\vec{V}_0|^2$$

すなわち運動エネルギーが保存されるときに成立する。

数学的定義

相対入射角、相対反射角、相対減速角

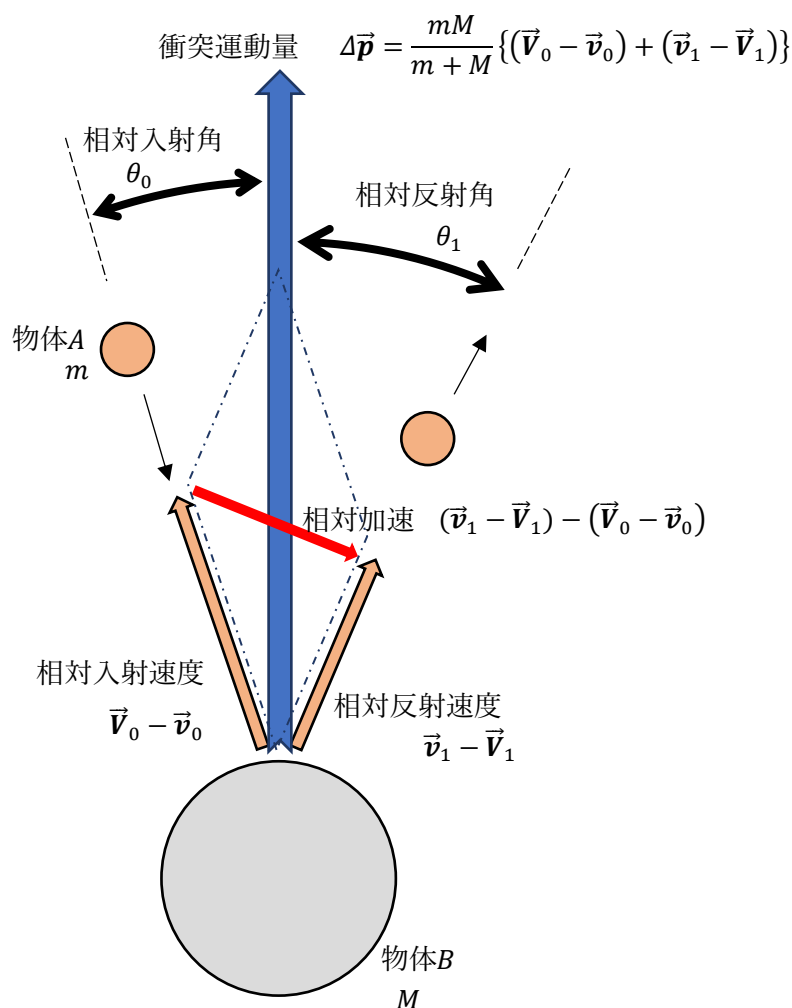
衝突運動量と、

相対入射速度のなす角（以下 θ_0 ）を、（物体Bから見た物体Aの）相対入射角

相対反射速度のなす角（以下 θ_1 ）を、（物体Bから見た物体Aの）相対反射角

と呼ぶことにする。

物体Bの視点で見た物体Aの運動



（注） $\Delta\vec{p} = \frac{mM}{m+M}\{(\vec{V}_0 - \vec{v}_0) + (\vec{v}_1 - \vec{V}_1)\}$ なので、衝突運動量、相対入射速度、相対反射速度の3つのベクトルは、同一平面上にある。

なお以下において、

θ_0 は鋭角と仮定する。（衝突時に運動方向に加速されるような場合は考えない。）

θ_1 も鋭角と仮定する。（衝突時に接触面を透過するような場合は考えない。）

数学的定義

衝突と反発係数

反発係数 e を

$$e = \frac{|\vec{v}_1 - \vec{v}_1| \cos \theta_1}{|\vec{v}_0 - \vec{v}_0| \cos \theta_0}$$

とする。

数学定理

運動エネルギーと反発係数の値の範囲

衝突により運動エネルギーが保存されるかまたは減少するとすれば、
反発係数の取りうる範囲は、

$$0 \leq e \leq 1$$

である。

$e = 1$ のとき : 衝突により運動エネルギーは保存される。これを「弾性衝突」という。

$0 \leq e < 1$ のとき : 衝突により運動エネルギーは減少する。これを「非弾性衝突」という。

$e = 0$ のとき : 衝突により運動エネルギーは消失する。これを「完全非弾性衝突」という。

数学定理

衝突によるエネルギー損失

衝突によるエネルギー損失、すなわち、衝突後の運動エネルギー - 衝突前の運動エネルギー) は、

$$\begin{aligned} &= \left\{ \frac{1}{2} m |\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2} M |\vec{V}_1|^2 \right\} - \left\{ \frac{1}{2} m |\vec{v}_0|^2 + \frac{1}{2} M |\vec{V}_0|^2 \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} \left\{ |\vec{V}_0 - \vec{v}_0|^2 - |\vec{v}_1 - \vec{V}_1|^2 \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} |\vec{V}_0 - \vec{v}_0|^2 \left(1 - e^2 \frac{\cos^2 \theta_0}{\cos^2 \theta_1} \right) \end{aligned}$$

である。

数学定理

衝突と反発係数 (1次元運動の場合)

θ_0, θ_1 ともに 0 とし、速度が 1 次元スカラー値の場合。

入射の逆方向に反射するのであるから、 $V_1 - v_1$ と $v_0 - V_0$ は同符号であり、反発係数は

$$e = \frac{v_1 - V_1}{V_0 - v_0}$$

となる。

$e = 1 \cdots$ 弾性衝突 (運動エネルギー保存)

$0 \leq e < 1 \cdots$ 非弾性衝突 (特に $0 = e$ のとき、完全非弾性衝突)

である。

【問題 40】衝突運動量と、相対入射速度、相対反射速度の関係

衝突運動量の定義

$$m(\vec{v}_1 - \vec{v}_0) = -M(\vec{V}_1 - \vec{V}_0) = \Delta\vec{p}$$

を用いて、衝突運動量と、相対入射速度、相対反射速度に次の関係が成立することを証明せよ。

$$\Delta\vec{p} = \frac{mM}{m+M} \{(\vec{V}_0 - \vec{v}_0) + (\vec{v}_1 - \vec{V}_1)\}$$

$$m(\vec{v}_1 - \vec{v}_0) = -M(\vec{V}_1 - \vec{V}_0) = \Delta\vec{p} \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} \Delta\vec{p} = m(\vec{v}_1 - \vec{v}_0) \\ \Delta\vec{p} = -M(\vec{V}_1 - \vec{V}_0) \end{cases} \text{したがって} \quad \begin{cases} \frac{1}{m}\Delta\vec{p} = \vec{v}_1 - \vec{v}_0 \\ \frac{1}{M}\Delta\vec{p} = -(\vec{V}_1 - \vec{V}_0) \end{cases}$$

であるから、

$$\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\Delta\vec{p} = (\vec{v}_1 - \vec{v}_0) - (\vec{V}_1 - \vec{V}_0) = (\vec{V}_0 - \vec{v}_0) + (\vec{v}_1 - \vec{V}_1)$$

したがって、

$$\frac{m+M}{mM}\Delta\vec{p} = (\vec{V}_0 - \vec{v}_0) + (\vec{v}_1 - \vec{V}_1)$$

$$\Delta\vec{p} = \frac{mM}{m+M} \{(\vec{V}_0 - \vec{v}_0) + (\vec{v}_1 - \vec{V}_1)\}$$

【問題 41】 衝突と運動エネルギー、相対速度の関係

(1) もし衝突の前後で運動エネルギーが保存されるかまたは減少するならば、すなわち

$$\frac{1}{2}m|\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2}M|\vec{V}_1|^2 \leq \frac{1}{2}m|\vec{v}_0|^2 + \frac{1}{2}M|\vec{V}_0|^2$$

が成立するならば、

$$\Delta\vec{p} \cdot \{(\vec{v}_1 - \vec{V}_1) - (\vec{v}_0 - \vec{V}_0)\} \leq 0$$

が成立する、つまり衝突運動量と相対加速の内積は 0 以下であることを証明せよ。

$$\frac{1}{2}m|\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2}M|\vec{V}_1|^2 \leq \frac{1}{2}m|\vec{v}_0|^2 + \frac{1}{2}M|\vec{V}_0|^2 \quad \text{より、}$$

$$m(|\vec{v}_1|^2 - |\vec{v}_0|^2) + M(|\vec{V}_1|^2 - |\vec{V}_0|^2) \leq 0$$

$$m(\vec{v}_1 - \vec{v}_0) \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_0) + M(\vec{V}_1 - \vec{V}_0) \cdot (\vec{V}_1 + \vec{V}_0) \leq 0$$

である。

これに、 $m(\vec{v}_1 - \vec{v}_0) = -M(\vec{V}_1 - \vec{V}_0) = \Delta\vec{p}$ を代入すると、

$$\Delta\vec{p} \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_0) - \Delta\vec{p} \cdot (\vec{V}_1 + \vec{V}_0) \leq 0$$

$$\Delta\vec{p} \cdot \{(\vec{v}_1 + \vec{v}_0) - (\vec{V}_1 + \vec{V}_0)\} \leq 0$$

$$\Delta\vec{p} \cdot \{(\vec{v}_1 - \vec{V}_1) - (\vec{v}_0 - \vec{V}_0)\} \leq 0$$

が得られる。

(2) 上記 (1) において、 $\Delta \vec{p} = \frac{mM}{m+M} \{(\vec{V}_0 - \vec{v}_0) + (\vec{v}_1 - \vec{V}_1)\}$ であることを用いて、

$$|\vec{v}_1 - \vec{V}_1| \leq |\vec{V}_0 - \vec{v}_0|$$

が成立する、つまり、衝突によって相対速度の絶対値は等しいかまたは減少することを証明せよ。

上記 (1) の $\Delta \vec{p} \cdot \{(\vec{v}_1 - \vec{V}_1) - (\vec{V}_0 - \vec{v}_0)\} \leq 0$ に $\Delta \vec{p} = \frac{mM}{m+M} \{(\vec{V}_0 - \vec{v}_0) + (\vec{v}_1 - \vec{V}_1)\}$ を代入すると、

$$\frac{mM}{m+M} \{(\vec{V}_0 - \vec{v}_0) + (\vec{v}_1 - \vec{V}_1)\} \cdot \{(\vec{v}_1 - \vec{V}_1) - (\vec{V}_0 - \vec{v}_0)\} \leq 0$$

$$\frac{mM}{m+M} \{(\vec{V}_0 - \vec{v}_0) + (\vec{v}_1 - \vec{V}_1)\} \cdot \{(\vec{v}_1 - \vec{V}_1) - (\vec{V}_0 - \vec{v}_0)\} \leq 0$$

$$|\vec{v}_1 - \vec{V}_1|^2 - |\vec{V}_0 - \vec{v}_0|^2 \leq 0$$

$$|\vec{v}_1 - \vec{V}_1|^2 \leq |\vec{V}_0 - \vec{v}_0|^2$$

$$|\vec{v}_1 - \vec{V}_1| \leq |\vec{V}_0 - \vec{v}_0|$$

が得られる。

【問題 42】 衝突と反発係数

反発係数 e を $e = \frac{|\vec{v}_1 - \vec{V}_1| \cos \theta_1}{|\vec{V}_0 - \vec{v}_0| \cos \theta_0}$ とする。

ここで相対入射角 θ_0 は、衝突運動量 $\Delta \vec{p}$ と、相対入射速度 $\vec{V}_0 - \vec{v}_0$ なす角である。
(すなわち分母 $|\vec{V}_0 - \vec{v}_0| \cos \theta_0$ は、相対入射速度の衝突運動量方向の成分である。)

同様に、相対反射角 θ_1 は、衝突運動量 $\Delta \vec{p}$ と、相対反射速度 $\vec{v}_1 - \vec{V}_1$ なす角である。
(すなわち分子 $|\vec{v}_1 - \vec{V}_1| \cos \theta_1$ は、相対反射速度の衝突運動量方向の成分である。)

なお、 θ_0 、 θ_1 はともに鋭角とする。

このとき、運動エネルギーが保存または減少するならば

$$e \leq 1$$

であることを証明せよ。

上記 (1) より

$$\Delta \vec{p} \cdot \{(\vec{v}_1 - \vec{V}_1) - (\vec{V}_0 - \vec{v}_0)\} \leq 0$$

$$\Delta \vec{p} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{V}_1) - \Delta \vec{p} \cdot (\vec{V}_0 - \vec{v}_0) \leq 0$$

$$|\Delta \vec{p}| |\vec{v}_1 - \vec{V}_1| \cos \theta_1 - |\Delta \vec{p}| |\vec{V}_0 - \vec{v}_0| \cos \theta_0 \leq 0$$

$$|\vec{v}_1 - \vec{V}_1| \cos \theta_1 - |\vec{V}_0 - \vec{v}_0| \cos \theta_0 \leq 0$$

$$|\vec{v}_1 - \vec{V}_1| \cos \theta_1 \leq |\vec{V}_0 - \vec{v}_0| \cos \theta_0$$

$$|\vec{v}_1 - \vec{V}_1| \cos \theta_1 \leq |\vec{V}_0 - \vec{v}_0| \cos \theta_0$$

$$\frac{|\vec{v}_1 - \vec{V}_1| \cos \theta_1}{|\vec{V}_0 - \vec{v}_0| \cos \theta_0} \leq 1 \quad (\because \theta_0 \text{ は鋭角なので、} \cos \theta_0 > 0)$$

よって

$$e \leq 1$$

が成り立つ。

(注) θ_0 、 θ_1 がともに鋭角であり、 $e = \frac{|\vec{v}_1 - \vec{V}_1| \cos \theta_1}{|\vec{V}_0 - \vec{v}_0| \cos \theta_0} \geq 0$ であることを併せ考えると、

$$0 \leq e \leq 1$$

である。

【問題 43】衝突によるエネルギー損失

衝突前後の運動エネルギーの差が、

$$\left\{\frac{1}{2}m|\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2}M|\vec{V}_1|^2\right\} - \left\{\frac{1}{2}m|\vec{v}_0|^2 + \frac{1}{2}M|\vec{V}_0|^2\right\} = -\frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} |\vec{V}_0 - \vec{v}_0|^2 \left(1 - e^2 \frac{\cos^2 \theta_0}{\cos^2 \theta_1}\right)$$

で表わされることを証明せよ。

$$\begin{aligned} & \left\{\frac{1}{2}m|\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2}M|\vec{V}_1|^2\right\} - \left\{\frac{1}{2}m|\vec{v}_0|^2 + \frac{1}{2}M|\vec{V}_0|^2\right\} \\ &= \frac{1}{2}m(|\vec{v}_1|^2 - |\vec{v}_0|^2) + \frac{1}{2}M(|\vec{V}_1|^2 - |\vec{V}_0|^2) \\ &= \frac{1}{2}m(\vec{v}_1 - \vec{v}_0) \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_0) + \frac{1}{2}M(\vec{V}_1 - \vec{V}_0) \cdot (\vec{V}_1 + \vec{V}_0) \\ & \quad (m(\vec{v}_1 - \vec{v}_0) = -M(\vec{V}_1 - \vec{V}_0) = \Delta\vec{p} \text{ を代入して}) \\ &= \frac{1}{2} \Delta\vec{p} \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_0) - \Delta\vec{p} \cdot (\vec{V}_1 + \vec{V}_0) \\ &= \frac{1}{2} \Delta\vec{p} \cdot \{(\vec{v}_1 - \vec{V}_1) - (\vec{V}_0 - \vec{v}_0)\} \\ & \quad (\Delta\vec{p} = \frac{mM}{m+M} \{(\vec{V}_0 - \vec{v}_0) + (\vec{v}_1 - \vec{V}_1)\} \text{ を代入して}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} \{(\vec{V}_0 - \vec{v}_0) + (\vec{v}_1 - \vec{V}_1)\} \cdot \{(\vec{v}_1 - \vec{V}_1) - (\vec{V}_0 - \vec{v}_0)\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} \{|\vec{v}_1 - \vec{V}_1|^2 - |\vec{V}_0 - \vec{v}_0|^2\} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} |\vec{V}_0 - \vec{v}_0|^2 \left\{1 - \frac{|\vec{v}_1 - \vec{V}_1|^2}{|\vec{V}_0 - \vec{v}_0|^2}\right\} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} |\vec{V}_0 - \vec{v}_0|^2 \left\{1 - \left(\frac{|\vec{v}_1 - \vec{V}_1| \cos \theta_1}{|\vec{V}_0 - \vec{v}_0| \cos \theta_0}\right)^2 \times \left(\frac{\cos \theta_0}{\cos \theta_1}\right)^2\right\} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} |\vec{V}_0 - \vec{v}_0|^2 \left(1 - e^2 \frac{\cos^2 \theta_0}{\cos^2 \theta_1}\right) \end{aligned}$$

【問題 44】衝突と反発係数（1 次元運動の場合）

1 次元運動を行う、次のような、2 つの物体の衝突を考える。

物体A 質量 m 、衝突前の速度 v_0 、衝突後の速度 v_1

物体B 質量 M 、衝突前の速度 V_0 、衝突後の速度 V_1

このとき、

(1) 衝突運動量の定義

$$m(v_1 - v_0) = -M(V_1 - V_0) = \Delta p$$

を用いて、衝突運動量と、相対入射速度、相対反射速度に次の関係が成立することを証明せよ。

$$\Delta p = \frac{mM}{m+M} \{(V_0 - v_0) + (v_1 - V_1)\}$$

なお、以下では $\Delta p \neq 0$ とする。

$$m(v_1 - v_0) = -M(V_1 - V_0) = \Delta p \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} \Delta p = m(v_1 - v_0) \\ \Delta p = -M(V_1 - V_0) \end{cases} \text{したがって} \quad \begin{cases} \frac{1}{m}\Delta p = v_1 - v_0 \\ \frac{1}{M}\Delta p = -(V_1 - V_0) \end{cases}$$

であるから、

$$\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\Delta p = (v_1 - v_0) - (V_1 - V_0) = (V_0 - v_0) + (v_1 - V_1)$$

したがって、

$$\frac{m+M}{mM}\Delta p = (V_0 - v_0) + (v_1 - V_1)$$

$$\Delta p = \frac{mM}{m+M} \{(V_0 - v_0) + (v_1 - V_1)\}$$

(2) もし衝突の前後で運動エネルギーが保存されるまたは減少するならば、すなわち

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}MV_1^2 \leq \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}MV_0^2$$

が成立するならば、

$$\Delta p \cdot \{(v_1 - V_1) - (V_0 - v_0)\} \leq 0$$

が成立する、つまり衝突運動量と相対加速が異符号である（か、または相対加速が 0 である）ことを証明せよ。

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}MV_1^2 \leq \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}MV_0^2 \quad \text{より、}$$

$$m(v_1^2 - v_0^2) + M(V_1^2 - V_0^2) \leq 0$$

$$m(v_1 - v_0) \cdot (v_1 + v_0) + M(V_1 - V_0) \cdot (V_1 + V_0) \leq 0$$

である。

これに、 $m(v_1 - v_0) = -M(V_1 - V_0) = \Delta p$ を代入すると、

$$\Delta p \cdot (v_1 + v_0) - \Delta p \cdot (V_1 + V_0) \leq 0$$

$$\Delta p \cdot \{(v_1 + v_0) - (V_1 + V_0)\} \leq 0$$

$$\Delta p \cdot \{(v_1 - V_1) - (V_0 - v_0)\} \leq 0$$

が得られる。

(3) 反発係数 e を $e = \frac{|v_1 - V_1|}{|V_0 - v_0|}$ とする。

このとき、運動エネルギーが保存または減少するならば

$$e \leq 1$$

であることを証明せよ。

ただし、衝突運動量 Δp と相対入射速度 $V_0 - v_0$ は同符号、衝突運動量 Δp と相対反射速度 $v_1 - V_1$ も同符号とする。

上記(2)より

$$\Delta p \cdot \{(v_1 - V_1) - (V_0 - v_0)\} \leq 0$$

$$\Delta p \cdot (v_1 - V_1) \leq \Delta p \cdot (V_0 - v_0)$$

衝突運動量 Δp と相対入射速度 $V_0 - v_0$ は同符号、衝突運動量 Δp と相対反射速度 $v_1 - V_1$ も同符号であるから、両辺2乗すると、

$$\Delta p^2 \cdot (v_1 - V_1)^2 \leq \Delta p^2 \cdot (V_0 - v_0)^2$$

$$(v_1 - V_1)^2 \leq (V_0 - v_0)^2$$

$$\sqrt{(v_1 - V_1)^2} \leq \sqrt{(V_0 - v_0)^2}$$

$$|v_1 - V_1| \leq |V_0 - v_0|$$

$$\frac{|v_1 - V_1|}{|V_0 - v_0|} \leq 1$$

$$e \leq 1$$

(注) $e = \frac{|v_1 - V_1|}{|V_0 - v_0|} \geq 0$ であることを併せ考えると、

$$0 \leq e \leq 1$$

である。

(4) 衝突によるエネルギー損失が

衝突前後の運動エネルギーの差が、

$$\left\{\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}MV_1^2\right\} - \left\{\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}MV_0^2\right\} = -\frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} (V_0 - v_0)^2 (1 - e^2)$$

で表わされることを証明せよ。

$$\begin{aligned} & \left\{\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}MV_1^2\right\} - \left\{\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}MV_0^2\right\} \\ &= \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2) + \frac{1}{2}M(V_1^2 - V_0^2) \\ &= \frac{1}{2}m(v_1 - v_0) \cdot (v_1 + v_0) + \frac{1}{2}M(V_1 - V_0) \cdot (V_1 + V_0) \\ & \quad (m(v_1 - v_0) = -M(V_1 - V_0) = \Delta p \text{ を代入して}) \\ &= \frac{1}{2}\Delta p \cdot (v_1 + v_0) - \Delta p \cdot (V_1 + V_0) \\ &= \frac{1}{2}\Delta p \cdot \{(v_1 - V_1) - (V_0 - v_0)\} \\ & \quad (\Delta p = \frac{mM}{m+M} \{(V_0 - v_0) + (v_1 - V_1)\} \text{ を代入して}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} \{(V_0 - v_0) + (v_1 - V_1)\} \cdot \{(v_1 - V_1) - (V_0 - v_0)\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} \{(v_1 - V_1)^2 - (V_0 - v_0)^2\} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} (V_0 - v_0)^2 \left\{1 - \frac{(v_1 - V_1)^2}{(V_0 - v_0)^2}\right\} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} (V_0 - v_0)^2 (1 - e^2) \end{aligned}$$

【問題 45】 床との衝突

物体Aを高さ h_0 から垂直に落下させたところ、床に衝突し、高さ h_1 まで垂直に跳ね上がった。

このとき、物体Aと床の反発係数を求めよ。

ただし、床（地球）の質量は十分に大きく物体Aとの衝突による速度変化は0としてよい。

重力加速度を g 、床への入射速度を v_0 とすると、力学的エネルギー保存法則より

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_0$$

なので、相対入射速度は、高さ方向を正として表すと

$$v_0 = -\sqrt{2gh_0}$$

である。（注：相対入射速度なので、実際の速度の逆ベクトルとした。）

同様に、相対反射速度は

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}$$

であるので、反発係数は

$$e = \frac{|v_1 - V_1|}{|V_0 - v_0|} = \frac{|\sqrt{2gh_1} - 0|}{|0 - \sqrt{2gh_0}|} = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}}$$

である。

【問題 46】 衝突と反発係数（3 次元運動の場合）

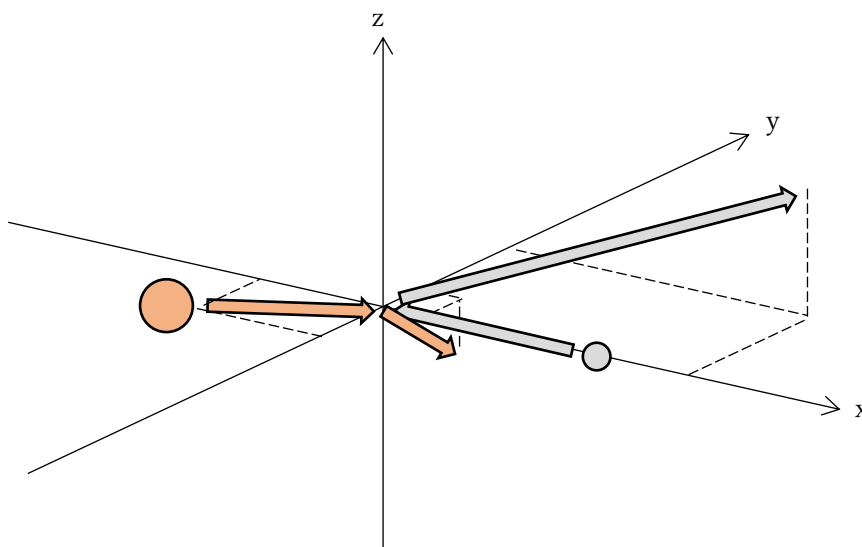
3 次元運動を行う、次のような、2 つの物体の衝突を考える。

物体A

質量 $m = 1$ 、衝突前の速度 $\vec{v}_0 = (-100, 0, 0)$ 、衝突後の速度 $\vec{v}_1 = (150, 50, 50)$

物体B

質量 $M = 5$ 、衝突前の速度 $\vec{V}_0 = (60, 20, 0)$ 、衝突後の速度 $\vec{V}_1$



(1) 物体Bの衝突後の速度 $\vec{V}_1$ を求めよ。

運動量保存法則 $m\vec{v}_1 + M\vec{V}_1 = m\vec{v}_0 + M\vec{V}_0$ より

$$1(150, 50, 50) + 5\vec{V}_1 = 1(-100, 0, 0) + 5(60, 20, 0)$$

これを解いて

$$\vec{V}_1 = (10, 10, -10)$$

(2) 次を求めよ。

相対入射速度 $\vec{V}_0 - \vec{v}_0$

相対反射速度 $\vec{v}_1 - \vec{V}_1$

相対加速 $(\vec{v}_1 - \vec{V}_1) - (\vec{V}_0 - \vec{v}_0)$

相対入射速度

$$\vec{V}_0 - \vec{v}_0 = (60, 20, 0) - (-100, 0, 0) = (160, 20, 0)$$

相対反射速度

$$\vec{v}_1 - \vec{V}_1 = (150, 50, 50) - (10, 10, -10) = (140, 40, 60)$$

相対加速

$$(\vec{v}_1 - \vec{V}_1) - (\vec{V}_0 - \vec{v}_0) = (140, 40, 60) - (160, 20, 0) = (-20, 20, 60)$$

(3) 衝突運動量 $\Delta\vec{p}$ を次の3つの方法で計算し、一致することを確認せよ。

$$\Delta\vec{p} = m(\vec{v}_1 - \vec{v}_0)$$

$$\Delta\vec{p} = -M(\vec{V}_1 - \vec{V}_0)$$

$$\Delta\vec{p} = \frac{mM}{m+M} \{(\vec{V}_0 - \vec{v}_0) + (\vec{v}_1 - \vec{V}_1)\}$$

$$\Delta\vec{p} = m(\vec{v}_1 - \vec{v}_0)$$

$$= 1\{(150, 50, 50) - (-100, 0, 0)\}$$

$$= (250, 50, 50)$$

$$\Delta\vec{p} = -M(\vec{V}_1 - \vec{V}_0)$$

$$= -5\{(10, 10, -10) - (60, 20, 0)\}$$

$$= (250, 50, 50)$$

$$\Delta\vec{p} = \frac{mM}{m+M} \{(\vec{V}_0 - \vec{v}_0) + (\vec{v}_1 - \vec{V}_1)\}$$

$$= \frac{1 \times 5}{1+5} \{[(60, 20, 0) - (-100, 0, 0)] + [(150, 50, 50) - (10, 10, -10)]\}$$

$$= \frac{5}{6} [(160, 20, 0) + (140, 40, 60)]$$

$$= \frac{5}{6} (300, 60, 60)$$

$$= (250, 50, 50)$$

(4) 衝突運動量と相対加速の内積 $\Delta\vec{p} \cdot \{(\vec{v}_1 - \vec{v}_1) - (\vec{v}_0 - \vec{v}_0)\}$ を計算し、両者のなす角が鈍角であることを確認せよ。

$$\begin{aligned}\Delta\vec{p} \cdot \{(\vec{v}_1 - \vec{v}_1) - (\vec{v}_0 - \vec{v}_0)\} \\ &= (250, 50, 50) \cdot (-20, 20, 60) \\ &= -5000 + 1000 + 3000 \\ &= -1000\end{aligned}$$

(5) θ_0 を相対入射速度と衝突運動量のなす角、 θ_1 を相対反射速度と衝突運動量のなす角とすると、 $\cos\theta_0$ および $\cos\theta_1$ を求めよ。

$$\cos\theta_0 = \frac{\Delta\vec{p} \cdot (\vec{v}_0 - \vec{v}_0)}{|\Delta\vec{p}| |\vec{v}_0 - \vec{v}_0|} = \frac{(250, 50, 50) \cdot (160, 20, 0)}{|(250, 50, 50)| |(160, 20, 0)|} = \frac{41}{3\sqrt{195}}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{\Delta\vec{p} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_1)}{|\Delta\vec{p}| |\vec{v}_1 - \vec{v}_1|} = \frac{(250, 50, 50) \cdot (140, 40, 60)}{|(250, 50, 50)| |(140, 40, 60)|} = \frac{40}{3\sqrt{186}}$$

(6) 反発係数 $e = \frac{|\vec{v}_1 - \vec{v}_1| \cos\theta_1}{|\vec{v}_0 - \vec{v}_0| \cos\theta_0}$ を求めよ。

$$|\vec{v}_0 - \vec{v}_0| \cos\theta_0 = \frac{\Delta\vec{p} \cdot (\vec{v}_0 - \vec{v}_0)}{|\Delta\vec{p}|} = \frac{(250, 50, 50) \cdot (160, 20, 0)}{|(250, 50, 50)|} = \frac{820}{3\sqrt{3}}$$

$$|\vec{v}_1 - \vec{v}_1| \cos\theta_1 = \frac{\Delta\vec{p} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_1)}{|\Delta\vec{p}|} = \frac{(250, 50, 50) \cdot (140, 40, 60)}{|(250, 50, 50)|} = \frac{800}{3\sqrt{3}}$$

$$e = \frac{|\vec{v}_1 - \vec{v}_1| \cos\theta_1}{|\vec{v}_0 - \vec{v}_0| \cos\theta_0} = \frac{\frac{800}{3\sqrt{3}}}{\frac{820}{3\sqrt{3}}} = \frac{800}{820} = \frac{40}{41}$$

(7) エネルギー損失を次の2つの方法で計算し、一致することを確認せよ。

$$\left\{ \frac{1}{2} m |\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2} M |\vec{V}_1|^2 \right\} - \left\{ \frac{1}{2} m |\vec{v}_0|^2 + \frac{1}{2} M |\vec{V}_0|^2 \right\}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} |\vec{V}_0 - \vec{v}_0|^2 \left(1 - e^{2 \frac{\cos^2 \theta_0}{\cos^2 \theta_1}} \right)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{2} m |\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2} M |\vec{V}_1|^2 \right\} - \left\{ \frac{1}{2} m |\vec{v}_0|^2 + \frac{1}{2} M |\vec{V}_0|^2 \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2} |(150, 50, 50)|^2 + \frac{5}{2} |(10, 10, -10)|^2 \right\} - \left\{ \frac{1}{2} |(-100, 0, 0)|^2 + \frac{5}{2} |(60, 20, 0)|^2 \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \times 27500 + \frac{5}{2} \times 300 \right\} - \left\{ \frac{1}{2} \times 10000 + \frac{5}{2} \times 4000 \right\} \\ &= 14500 - 15000 \\ &= -500 \\ & - \frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} |\vec{V}_0 - \vec{v}_0|^2 \left(1 - e^{2 \frac{\cos^2 \theta_0}{\cos^2 \theta_1}} \right) \\ &= - \frac{1}{2} \frac{1 \times 5}{1+5} |(160, 20, 0)|^2 \left(1 - \left(\frac{40}{41} \right)^2 \frac{\left(\frac{41}{3\sqrt{195}} \right)^2}{\left(\frac{40}{3\sqrt{186}} \right)^2} \right) \\ &= - \frac{1}{2} \frac{5}{6} (20\sqrt{65})^2 \left(1 - \frac{186}{195} \right) \\ &= - \frac{5}{12} 400 \times 65 \times \frac{9}{195} \\ &= -500 \end{aligned}$$

【解説 14】 慣性系、非慣性系

数学的定義

観測者の座標系

物体の位置、速度、加速度は、観測者を基準（原点）とした相対的な座標系である。
ある観測者から見れば静止している物体が、別の観測者から見れば運動していることもある。

数学的定義

慣性系、非慣性系

ニュートン力学の第一法則は、「力を受けない物体が必ず等速直線運動を行う。」ように見える観測者が、この宇宙に少なくとも一人存在する。（そういう座標系が少なくとも一つ存在している。）ことを主張している。

その観測者に対して相対的に等速直線運動をしているような別の観測者にとっても、「力を受けない物体は必ず等速直線運動を行う」ように見えるはずである。

このようなニュートン力学の第一法則が成立するような観測者（座標系）を「慣性系（あるいは絶対静止系）」と呼ぶ。

慣性系でない座標系を「非慣性系」と呼ぶ。

「非慣性系」とは、慣性系に対して等速直線運動を「していない」座標系であるから、言い換えると、「慣性系に対して加速度を有するような座標系」である。

数学的定義

慣性力

「非慣性系」においては、座標系が加速している結果として、すべての物体がそれと逆向きに加速しているように見えることになる。

このとき、すべての物体に付加的な力が作用していることにしてしまえば（実際にはそういう力は作用していないにせよ便宜的に作用していることにしてしまっただけ合わせをすれば）、見かけ上ではニュートン力学を成立させることができる。

この見かけ上の加速を生み出す力のことを「慣性力」と呼ぶ。

(注) 物体系が全体的に自由落下しているような場合 (例えば宇宙ステーションの内部など)、慣性力と外力 (重力) がちょうど打ち消しあって、本態的な慣性系ではないのだけれども慣性系のような座標系が局地的に成立しうる。(このような慣性系を局所慣性系という。なお、宇宙ステーション内部の観測者にしてみれば、本態的な慣性系なのか局所慣性系なのかは区別できない。(アインシュタインの等価原理))

数学定理

ガリレイ変換

観測者が、慣性系に対して等速直線運動する場合。

(観測者の初期位置 $\vec{x}_0$ 、観測者の速度 $\vec{v}_0$ ($\vec{x}_0$ 、 $\vec{v}_0$ はいずれも定ベクトル) とする。)

【慣性系から見た物体の運動と、観測者から見た物体の運動】

	慣性系	観測者
位置	$\vec{x}(t)$	$\vec{\tilde{x}}(t) = \vec{x}(t) - (\vec{v}_0 t + \vec{x}_0)$
速度	$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$	$\vec{\tilde{v}}(t) = \frac{d\vec{\tilde{x}}(t)}{dt} = \vec{v}(t) - \vec{v}_0$
加速度	$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$	$\vec{\tilde{a}}(t) = \frac{d\vec{\tilde{v}}(t)}{dt} = \vec{a}(t)$
運動量	$\vec{p}(t) = m \vec{v}(t)$	$\vec{\tilde{p}}(t) = m \vec{\tilde{v}}(t) = \vec{p}(t) - m \vec{v}_0$
力	$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt}$	$\vec{\tilde{F}}(t) = \frac{d\vec{\tilde{p}}(t)}{dt} = \vec{F}(t)$
力積	$\vec{I}(t_0, t_1) = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0)$	$\vec{\tilde{I}}(t_0, t_1) = \vec{\tilde{p}}(t_1) - \vec{\tilde{p}}(t_0) = \vec{I}(t_0, t_1)$

このとき、

$$\vec{\tilde{F}}(t) = \vec{F}(t)$$

が成立しており、慣性系において物体に作用する力と、観測者からみて物体に作用する力に差異はない。

つまり、慣性系に対して等速直線運動する座標系はすべて慣性系であり、本質的に同質である。(ガリレイの相対原理)

数学定理

等加速度運動する座標系

観測者が、慣性系に対して等速直線運動する場合。

(観測者の初期位置 $\widetilde{\mathbf{x}}_0$ 、観測者の初期速度 $\widetilde{\mathbf{v}}_0$ 、観測者の加速度 $\widetilde{\mathbf{a}}_0$ ($\widetilde{\mathbf{x}}_0$ 、 $\widetilde{\mathbf{v}}_0$ 、 $\widetilde{\mathbf{a}}_0$ はいずれも定ベクトル) とする。)

【慣性系から見た物体の運動と、観測者から見た物体の運動】

	慣性系	観測者
位置	$\mathbf{x}(t)$	$\widetilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \left(\frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{a}}_0 t^2 + \widetilde{\mathbf{v}}_0 t + \widetilde{\mathbf{x}}_0 \right)$
速度	$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$	$\widetilde{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\widetilde{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{v}(t) - (\widetilde{\mathbf{a}}_0 t + \widetilde{\mathbf{v}}_0)$
加速度	$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}$	$\widetilde{\mathbf{a}}(t) = \frac{d\widetilde{\mathbf{v}}(t)}{dt} = \mathbf{a}(t) + \widetilde{\mathbf{a}}_0$
運動量	$\mathbf{p}(t) = m \mathbf{v}(t)$	$\widetilde{\mathbf{p}}(t) = m \widetilde{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{p}(t) - m(\widetilde{\mathbf{a}}_0 t + \widetilde{\mathbf{v}}_0)$
力	$\mathbf{F}(t) = \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt}$	$\widetilde{\mathbf{F}}(t) = \frac{d\widetilde{\mathbf{p}}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t) - m\widetilde{\mathbf{a}}_0$
力積	$\mathbf{I}(t_0, t_1) = \mathbf{p}(t_1) - \mathbf{p}(t_0)$	$\widetilde{\mathbf{I}}(t_0, t_1) = \widetilde{\mathbf{p}}(t_1) - \widetilde{\mathbf{p}}(t_0) = \mathbf{I}(t_0, t_1) - m\widetilde{\mathbf{a}}_0(t_1 - t_0)$

このとき、

$$\widetilde{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{F}(t) - m\widetilde{\mathbf{a}}_0$$

が成立している。

したがって観測者からみると、慣性系における力 $\mathbf{F}(t)$ に加えて $-m\widetilde{\mathbf{a}}_0$ の力が作用していると考えれば、観測者にとっての慣性系が成立する。

この $-m\widetilde{\mathbf{a}}_0$ は、観測者にとっての慣性系を成立させるために便宜的に付け加えた力であり、これを(等加速度運動する座標系における)慣性力とよぶ。

数学定理

等角速度で回転運動する座標系

観測者が、慣性系に対して等角速度で回転運動する場合。

(原点を中心とし、初期位相 0、角速度 ω (定数) とする。)

【慣性系から見た物体の運動と、観測者から見た物体の運動】

	慣性系	観測者
位置	$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$	$\tilde{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$
速度	$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{pmatrix}$	$\tilde{\vec{v}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} \\ \frac{d\tilde{y}(t)}{dt} \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \{x(t) \cos \omega t + y(t) \sin \omega t\} \\ \frac{d}{dt} \{-x(t) \sin \omega t + y(t) \cos \omega t\} \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} + \omega y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} - \omega x(t) \end{pmatrix}$
加速度	$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d^2x(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} \end{pmatrix}$	$\tilde{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d^2\tilde{x}(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2\tilde{y}(t)}{dt^2} \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{dx(t)}{dt} + \omega y(t) \right) \cos \omega t + \left(\frac{dy(t)}{dt} - \omega x(t) \right) \sin \omega t \right\} \\ \frac{d}{dt} \left\{ - \left(\frac{dx(t)}{dt} + \omega y(t) \right) \sin \omega t + \left(\frac{dy(t)}{dt} - \omega x(t) \right) \cos \omega t \right\} \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\omega \frac{dy(t)}{dt} - \omega^2 x(t) \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} - 2\omega \frac{dx(t)}{dt} - \omega^2 y(t) \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d^2x(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} \end{pmatrix}$ $+ \omega^2 \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - 2\omega \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{dy(t)}{dt} + \omega x(t) \\ \frac{dx(t)}{dt} + \omega y(t) \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d^2x(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 & +\omega^2 \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - 2\omega \begin{pmatrix} \sin \omega t & -\cos \omega t \\ \cos \omega t & \sin \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} + \omega y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} - \omega x(t) \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \end{pmatrix} \\
 & + \omega^2 \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - 2\omega \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} + \omega y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} - \omega x(t) \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \end{pmatrix} + \omega^2 \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix} - 2\omega \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} \\ \frac{d\tilde{y}(t)}{dt} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

【第1項】×質量

慣性系において物体に作用している真の力（を、観測者の座標系で表示した力）

$$\begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \end{pmatrix} \times m = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \times \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \\ m \times \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

力の大きさ：真の力と同じ

力の方向：真の力と同じ

【第2項】×質量

遠心力（観測者から見ると発生しているように見える、みかけの力）

$$\omega^2 \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix} \times m = m\omega^2 \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix}$$

力の大きさ： $m r \omega^2$ （ただし $r = \sqrt{\tilde{x}(t)^2 + \tilde{y}(t)^2}$ ）

力の方向：半径方向

【第3項】

コリオリの力（観測者から見ると発生しているように見える、みかけの力）

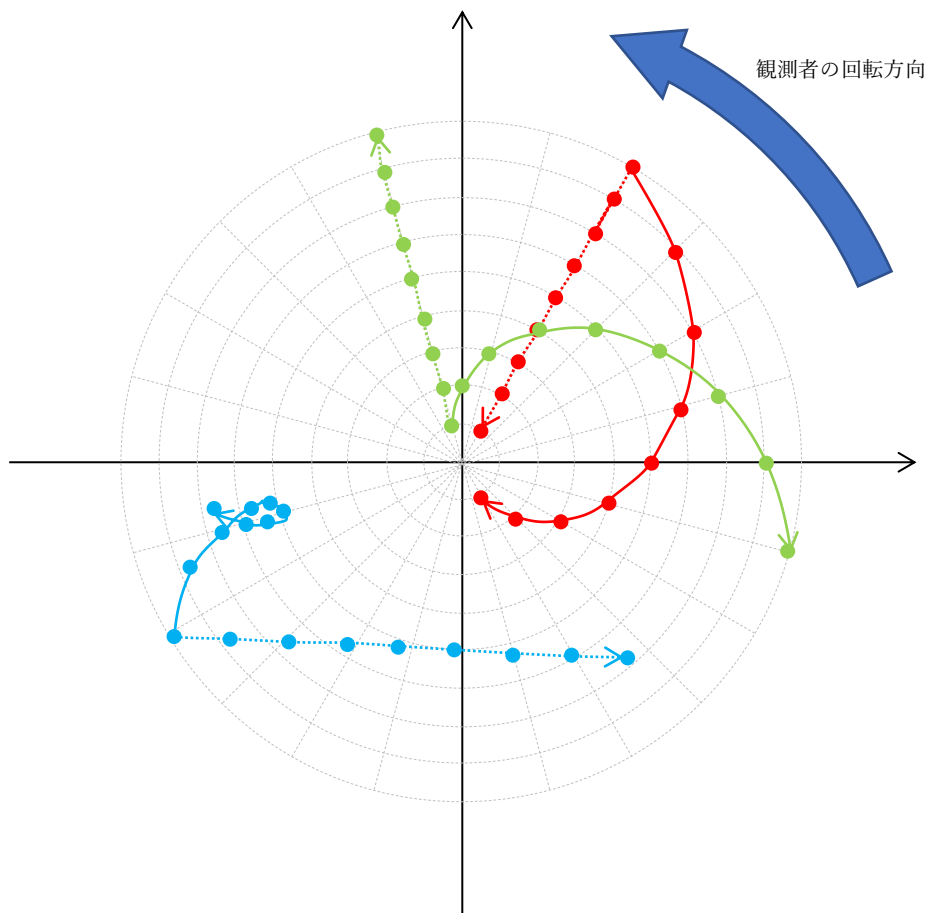
$$-2\omega \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} \\ \frac{d\tilde{y}(t)}{dt} \end{pmatrix} \times m$$

力の大きさ： $2m\omega|\tilde{v}(t)|$

力の方向：観測者が時計回り（反時計回り）のとき、コリオリの力は観測者から見た進行方向に対して右（左）向き

【概念図】

慣性系における運動（点線）と、回転する観測者から見た運動（実線）



【問題 47】 ガリレイ変換（計算例）

ある物体が慣性系で等速円運動をしており、時刻 t における物体の位置 $\vec{x}(t)$ が

$$\vec{x}(t) = (r \cos(\omega t + \theta) + K, r \sin(\omega t + \theta) + L)$$

であらわされたとする。

また、観測者が等速直線運動をしており、時刻 t における観測者の位置 $\vec{o}(t)$ が

$$\vec{o}(t) = (\alpha t + \beta, \gamma t + \delta)$$

であらわされたとする。

（１） 相対位置

観測者から見た物体の相対位置

$$\vec{\tilde{x}}(t) = \vec{x}(t) - \vec{o}(t)$$

を求めよ。

$$\vec{\tilde{x}}(t) = \vec{x}(t) - \vec{o}(t)$$

$$= (r \cos(\omega t + \theta) + K, r \sin(\omega t + \theta) + L) - (\alpha t + \beta, \gamma t + \delta)$$

$$= (r \cos(\omega t + \theta) + K - (\alpha t + \beta), r \sin(\omega t + \theta) + L - (\gamma t + \delta))$$

（２） 相対速度

観測者から見た物体の相対速度

$$\vec{\tilde{v}}(t) = \frac{d\vec{\tilde{x}}(t)}{dt}$$

を求めよ。

$$\vec{\tilde{v}}(t) = \frac{d\vec{\tilde{x}}(t)}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt} (r \cos(\omega t + \theta) + K - (\alpha t + \beta), r \sin(\omega t + \theta) + L - (\gamma t + \delta))$$

$$= (-r\omega \sin(\omega t + \theta) - \alpha, r\omega \cos(\omega t + \theta) - \gamma)$$

(3) 相対加速度

観測者から見た物体の相対加速度

$$\tilde{\mathbf{a}}(t) = \frac{d\tilde{\mathbf{v}}(t)}{dt}$$

を求めよ。

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{a}}(t) &= \frac{d\tilde{\mathbf{v}}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(-r\omega \sin(\omega t + \theta) - \alpha, r\omega \cos(\omega t + \theta) - \gamma) \\ &= (-r\omega^2 \cos(\omega t + \theta), -r\omega^2 \sin(\omega t + \theta))\end{aligned}$$

【問題 48】 等加速度運動する座標系（計算例）

ある物体が慣性系で等速円運動をしており、時刻 t における物体の位置 $\vec{x}(t)$ が

$$\vec{x}(t) = (r \cos(\omega t + \theta) + K, r \sin(\omega t + \theta) + L)$$

であらわされたとする。

また、観測者が等加速度運動をしており、時刻 t における観測者の位置 $\tilde{\vec{o}}(t)$ が

$$\tilde{\vec{o}}(t) = \left(\alpha t + \beta, \frac{1}{2} \gamma t^2 + \delta t + \varepsilon \right)$$

であらわされたとする。

（１） 相対位置

観測者から見た物体の相対位置

$$\tilde{\vec{x}}(t) = \vec{x}(t) - \tilde{\vec{o}}(t)$$

を求めよ。

$$\tilde{\vec{x}}(t) = \vec{x}(t) - \tilde{\vec{o}}(t)$$

$$= (r \cos(\omega t + \theta) + K, r \sin(\omega t + \theta) + L) - \left(\alpha t + \beta, \frac{1}{2} \gamma t^2 + \delta t + \varepsilon \right)$$

$$= \left(r \cos(\omega t + \theta) + K - (\alpha t + \beta), r \sin(\omega t + \theta) + L - \left(\frac{1}{2} \gamma t^2 + \delta t + \varepsilon \right) \right)$$

（２） 相対速度

観測者から見た物体の相対速度

$$\tilde{\vec{v}}(t) = \frac{d\tilde{\vec{x}}(t)}{dt}$$

を求めよ。

$$\tilde{\vec{v}}(t) = \frac{d\tilde{\vec{x}}(t)}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(r \cos(\omega t + \theta) + K - (\alpha t + \beta), r \sin(\omega t + \theta) + L - \left(\frac{1}{2} \gamma t^2 + \delta t + \varepsilon \right) \right)$$

$$= (-r\omega \sin(\omega t + \theta) - \alpha, r\omega \cos(\omega t + \theta) - (\gamma t + \delta))$$

(3) 相対加速度

観測者から見た物体の相対加速度

$$\tilde{\mathbf{a}}(t) = \frac{d\tilde{\mathbf{v}}(t)}{dt}$$

を求めよ。

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{a}}(t) &= \frac{d\tilde{\mathbf{v}}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(-r\omega \sin(\omega t + \theta) - \alpha, r\omega \cos(\omega t + \theta) - (\gamma t + \delta)) \\ &= (-r\omega^2 \cos(\omega t + \theta), -r\omega^2 \sin(\omega t + \theta) - \gamma)\end{aligned}$$

【問題 49】 等角速度で回転運動する座標系（計算例）

ある物体が慣性系で等速円運動をしており、時刻 t における物体の位置 $\vec{x}(t)$ が

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t + \theta) + K \\ r \sin(\omega t + \theta) + L \end{pmatrix}$$

であらわされるとする。

また、観測者が等角速度で回転運動をしており、回転中心が原点、角速度が Ω であるとする。

（1） 相対位置

観測者から見た物体の相対位置

$$\tilde{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

を求めよ。

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{x}}(t) &= \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \vec{x}(t) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos(\omega t + \theta) + K \\ r \sin(\omega t + \theta) + L \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \theta) \\ \sin(\omega t + \theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} \cos \Omega t \cos(\omega t + \theta) + \sin \Omega t \sin(\omega t + \theta) \\ -\sin \Omega t \cos(\omega t + \theta) + \cos \Omega t \sin(\omega t + \theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} \cos \{(\omega - \Omega)t + \theta\} \\ \sin \{(\omega - \Omega)t + \theta\} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) 相対速度

観測者から見た物体の相対速度

$$\tilde{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\tilde{\mathbf{x}}(t)}{dt}$$

を求めよ。

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{v}}(t) &= \frac{d\tilde{\mathbf{x}}(t)}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left[r \begin{pmatrix} \cos \{(\omega - \Omega)t + \theta\} \\ \sin \{(\omega - \Omega)t + \theta\} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} \right] \\ &= r(\omega - \Omega) \begin{pmatrix} -\sin \{(\omega - \Omega)t + \theta\} \\ \cos \{(\omega - \Omega)t + \theta\} \end{pmatrix} - \Omega \begin{pmatrix} \sin \Omega t & -\cos \Omega t \\ \cos \Omega t & \sin \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix}\end{aligned}$$

【別解】

$$\tilde{\mathbf{v}}(t) = \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \left\{ \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} + \Omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \right\} \quad \text{より、}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{v}}(t) &= \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \frac{d}{dt} (r \cos(\omega t + \theta) + K) \\ &\quad + \Omega \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (r \sin(\omega t + \theta) + L) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} r \omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t + \theta) \\ \cos(\omega t + \theta) \end{pmatrix} \\ &\quad + \Omega \begin{pmatrix} -\sin \Omega t & \cos \Omega t \\ -\cos \Omega t & -\sin \Omega t \end{pmatrix} (r \cos(\omega t + \theta) + K) \\ &= r \omega \begin{pmatrix} -\cos \Omega t \sin(\omega t + \theta) + \sin \Omega t \cos(\omega t + \theta) \\ \sin \Omega t \sin(\omega t + \theta) + \cos \Omega t \cos(\omega t + \theta) \end{pmatrix} \\ &\quad - r \Omega \begin{pmatrix} \sin \Omega t \cos(\omega t + \theta) - \cos \Omega t \sin(\omega t + \theta) \\ \cos \Omega t \cos(\omega t + \theta) + \sin \Omega t \sin(\omega t + \theta) \end{pmatrix} - \Omega \begin{pmatrix} \sin \Omega t & -\cos \Omega t \\ \cos \Omega t & \sin \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} \\ &= r(\omega - \Omega) \begin{pmatrix} -\cos \Omega t \sin(\omega t + \theta) + \sin \Omega t \cos(\omega t + \theta) \\ \sin \Omega t \sin(\omega t + \theta) + \cos \Omega t \cos(\omega t + \theta) \end{pmatrix} - \Omega \begin{pmatrix} \sin \Omega t & -\cos \Omega t \\ \cos \Omega t & \sin \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} \\ &= r(\omega - \Omega) \begin{pmatrix} -\sin \{(\omega - \Omega)t + \theta\} \\ \cos \{(\omega - \Omega)t + \theta\} \end{pmatrix} - \Omega \begin{pmatrix} \sin \Omega t & -\cos \Omega t \\ \cos \Omega t & \sin \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(3) 相対加速度

観測者から見た物体の相対加速度

$$\tilde{\mathbf{a}}(t) = \frac{d\tilde{\mathbf{v}}(t)}{dt}$$

を求めよ。

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{a}}(t) &= \frac{d\tilde{\mathbf{v}}(t)}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left[r(\omega - \Omega) \begin{pmatrix} -\sin\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \\ \cos\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \end{pmatrix} - \Omega \begin{pmatrix} \sin \Omega t & -\cos \Omega t \\ \cos \Omega t & \sin \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} \right] \\ &= r(\omega - \Omega)^2 \begin{pmatrix} -\cos\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \\ -\sin\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \end{pmatrix} - \Omega^2 \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} \\ &= -r(\omega - \Omega)^2 \begin{pmatrix} \cos\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \\ \sin\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \end{pmatrix} - \Omega^2 \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(4) 真の力、遠心力、コリオリの力

① 真の力

観測者から見た、真の力によって生じる加速度（真の力を質量で除した値）

$$\begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \frac{d^2 \tilde{\mathbf{x}}(t)}{dt^2}$$

を求めよ。

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \frac{d^2 \tilde{\mathbf{x}}(t)}{dt^2} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} (r \cos(\omega t + \theta) + K) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos(\omega t + \theta) \\ -r\omega^2 \sin(\omega t + \theta) \end{pmatrix} \\ &= -r\omega^2 \begin{pmatrix} \cos \Omega t \cos(\omega t + \theta) + \sin \Omega t \sin(\omega t + \theta) \\ -\sin \Omega t \cos(\omega t + \theta) + \cos \Omega t \sin(\omega t + \theta) \end{pmatrix} \\ &= -r\omega^2 \begin{pmatrix} \cos\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \\ \sin\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

②遠心力

観測者から見た、遠心力によって生じる加速度（遠心力を質量で除した値）

$$\Omega^2 \tilde{\mathbf{x}}(t)$$

を求めよ。

$$\begin{aligned} \Omega^2 \tilde{\mathbf{x}}(t) &= \Omega^2 \left[r \begin{pmatrix} \cos\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \\ \sin\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} \right] \\ &= r \Omega^2 \begin{pmatrix} \cos\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \\ \sin\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \end{pmatrix} + \Omega^2 \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

③コリオリの力

観測者から見た、コリオリの力によって生じる加速度（コリオリの力を質量で除した値）

$$-2\Omega \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \frac{d\tilde{\mathbf{x}}(t)}{dt}$$

を求めよ。

$$\begin{aligned} -2\Omega \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \frac{d\tilde{\mathbf{x}}(t)}{dt} &= -2\Omega \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \left[r \begin{pmatrix} \cos\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \\ \sin\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} \right] \\ &= -2\Omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left[r(\omega - \Omega) \begin{pmatrix} -\sin\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \\ \cos\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \end{pmatrix} + \Omega \begin{pmatrix} -\sin \Omega t & \cos \Omega t \\ -\cos \Omega t & -\sin \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} \right] \\ &= -2r\Omega(\omega - \Omega) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \\ \cos\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \end{pmatrix} - 2\Omega^2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \Omega t & \cos \Omega t \\ -\cos \Omega t & -\sin \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} \\ &= -2r\Omega(\omega - \Omega) \begin{pmatrix} -\cos\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \\ -\sin\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \end{pmatrix} - 2\Omega^2 \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} \\ &= (2r\omega\Omega - 2r\Omega^2) \begin{pmatrix} \cos\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \\ \sin\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \end{pmatrix} - 2\Omega^2 \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

④真の力、遠心力、コリオリの力の和

①～③の加速度の和を求めよ。

①+②+③

$$\begin{aligned}
 &= -r\omega^2 \begin{pmatrix} \cos\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \\ \sin\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \end{pmatrix} + r\Omega^2 \begin{pmatrix} \cos\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \\ \sin\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \end{pmatrix} + \Omega^2 \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} \\
 &\quad + (2r\omega\Omega - 2r\Omega^2) \begin{pmatrix} \cos\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \\ \sin\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \end{pmatrix} - 2\Omega^2 \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} \\
 &= (-r\omega^2 + 2r\omega\Omega - r\Omega^2) \begin{pmatrix} \cos\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \\ \sin\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \end{pmatrix} - \Omega^2 \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} \\
 &= -r(\omega - \Omega)^2 \begin{pmatrix} \cos\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \\ \sin\{(\omega - \Omega)t + \theta\} \end{pmatrix} - \Omega^2 \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

【解説 15】微分方程式の解法（その 1 基本形）

数学定理

以下に、基本的な微分方程式の解法（概略）を示す。

基本的な微分方程式	直接積分形	方程式	$\frac{dy}{dx} = f(x)$
		一般解	$y = \int f(x) dx$
		例	$\frac{dy}{dx} = \sin x$ のとき $y = \cos x + C$
	変数分離形	方程式	$g(y) \frac{dy}{dx} = f(x)$
		一般解	$\int g(y) dy = \int f(x) dx$
		例	$\frac{dy}{dx} = xy$ のとき $y = C e^{\frac{1}{2}x^2}$
	同次形	方程式	$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$
		一般解	$u = \frac{y}{x}$ と置くと、 $\frac{du}{dx} \cdot x + u = f(u)$ これを変数分離形として解き $\int \frac{1}{f(u)-u} du = \int \frac{1}{x} dx$
		例	$x(x^2 + y^2) \frac{dy}{dx} = x^3 + x^2y + y^3$ のとき $3x^2y + y^3 = 3x^3 \{\log x + c\}$
	1 次式形	方程式	$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$
		一般解	$t = ax + by + c$ と置くと、 $\frac{dt}{dx} = a + bf(t)$ これを変数分離形として解き $\int \frac{1}{a+bf(t)} dt = \int dx$
		例	$\cos(2x + y + 3) \left(\frac{dy}{dx} + 2\right) = 1$ のとき $\sin(2x + y + 3) = x + C$
	1 次分数形	方程式	$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + s}{cx + dy + t}\right)$
		一般解	① $s = t = 0$ のとき $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a+b\frac{y}{x}}{c+d\frac{y}{x}}\right)$ とし、同次形に帰着 ② $s = t = 0$ 以外のとき $ad - bc \neq 0$ のとき $\begin{cases} ax + by + s = 0 \\ cx + dy + t = 0 \end{cases}$ の解を用いて $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = f\left(\frac{a\bar{x}+b\bar{y}+s}{c\bar{x}+d\bar{y}+t}\right)$ とし、①に帰着 $ad - bc = 0$ のとき $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+s}{k(ax+by)+t}\right)$ なので $u = ax + by$ と置いて $\frac{1}{b} \left(\frac{du}{dx} - a\right) = f\left(\frac{u+s}{ku+t}\right)$ よって $\frac{du}{dx} = bf\left(\frac{u+s}{ku+t}\right) + a$ とし、直接積分形に帰着
		例	$\frac{dy}{dx} = \frac{x-2y+3}{3x-4y+5}$ のとき $(-x + y - 1)(-x + 4y - 7)^2 = D$

【問題 50】微分方程式例題（その 1 基本形）

（1）直接積分形



$\frac{dy}{dx} = \sin x$ の解を求めよ。

両辺を積分し、

$$\int dy = \int \sin x \, dx$$

$$y = -\cos x + C$$

（2）変数分離形

$\frac{dy}{dx} = xy$ の解を求めよ。

① $y \neq 0$ のとき

$$\int \frac{1}{y} dy = \int x \, dx$$

$$\log|y| = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$|y| = e^C \times e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$y = (\pm e^C) e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$(\pm e^C) = D$ とおくと

$$y = D e^{\frac{1}{2}x^2} \quad (D \neq 0)$$

これはすべての x について $y \neq 0$ であるから条件を満たす。

② $y = 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$y = 0$ （恒等関数）はこの条件を満たす。

また、曲線と x 軸の交点においては傾きが 0、それ以外の点（つまり $y \neq 0$ ）のときには $y = D e^{\frac{1}{2}x^2}$ ($D \neq 0$) であるような関数は、連続関数の中には存在しない。

したがって条件を満たす関数は $y = 0$ （恒等関数）のみである。

①および②より、解は

$$y = D e^{\frac{1}{2}x^2} \quad (D \text{ は任意の実数})$$

である。

(3) 同次形



$x(x^2 + y^2) \frac{dy}{dx} = x^3 + x^2y + y^3$ の解を求めよ。

両辺を x^3 で除して

$$\left\{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right\} \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^3$$

$u = \frac{y}{x}$ と置くと、(このとき $y = xu$ より $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$)

$$\text{与式は } (1 + u^2)(u + x \frac{du}{dx}) = 1 + u + u^3$$

$$\text{式を整理して } (1 + u^2)x \frac{du}{dx} = 1$$

変数分離形として解くと、

$$\int (1 + u^2) du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$u + \frac{1}{3}u^3 = \log|x| + C$$

$u = \frac{y}{x}$ を代入し

$$\frac{y}{x} + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 = \log|x| + C$$

$$\text{式を整理して } 3x^2y + y^3 = 3x^3\{\log|x| + C\}$$

(4) 1次式形



$\cos(2x + y + 3) \left(\frac{dy}{dx} + 2 \right) = 1$ の解を求めよ。

$t = 2x + y + 3$ と置くと、(このとき $\frac{dt}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$)

与式は $\cos t \left\{ \left(\frac{dt}{dx} - 2 \right) + 2 \right\} = 1$

式を整理して $\cos t \times \frac{dt}{dx} = 1$

変数分離形として解くと、

$$\int \cos t \, dt = \int dx$$

$$\sin t = x + C$$

$t = 2x + y + 3$ を代入し

$$\sin(2x + y + 3) = x + C$$

(5) 1 次分数形



$\frac{dy}{dx} = \frac{x-2y+3}{3x-4y+5}$ の解を求めよ。

$\begin{cases} x-2y+3=0 \\ 3x-4y+5=0 \end{cases}$ を解いて $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 、これを用いると、与式は $\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)-2(y-2)}{3(x-1)-4(y-2)}$ と書き換えることができる。

$\begin{cases} \tilde{x}=x-1 \\ \tilde{y}=y-2 \end{cases}$ と置くと (このとき $\begin{cases} d\tilde{x}=dx \\ d\tilde{y}=dy \end{cases}$ であるから $\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \frac{dy}{dx}$) $\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \frac{\tilde{x}-2\tilde{y}}{3\tilde{x}-4\tilde{y}}$ となり、よって $\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \frac{1-2(\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}})}{3-4(\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}})}$ である。

$u = \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}$ と置くと (このとき $u\tilde{x} = \tilde{y}$ であるから $\frac{du}{d\tilde{x}}\tilde{x} + u = \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}$) $\frac{du}{d\tilde{x}}\tilde{x} + u = \frac{1-2u}{3-4u}$ となり、これを整理すると

$\frac{du}{d\tilde{x}}\tilde{x} = \frac{(u-1)(4u-1)}{3-4u}$ である。

これを変数分離形として解き、

$$\begin{aligned} \int \frac{3-4u}{(u-1)(4u-1)} du &= \int \frac{1}{\tilde{x}} d\tilde{x} \\ -\frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{u-1} + \frac{8}{4u-1} \right) du &= \int \frac{1}{\tilde{x}} d\tilde{x} \\ -\frac{1}{3} \{ \log|u-1| + 2 \log|4u-1| \} &= \log|\tilde{x}| + C \end{aligned}$$

$u = \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}$ 、 $\tilde{x} = x-1$ を代入し、さらに式を整理すると

$$\log|(-x+y-1)(-x+4y-7)^2| = C$$

よって $\pm e^C = D$ として

$$(-x+y-1)(-x+4y-7)^2 = D \quad (D \neq 0)$$

を得る。

ここで、 $-x+y-1=0$ (すなわち $y=x+1$) は、与式の微分方程式の解である。なぜならば、

$y=x+1$ を微分して、 $\frac{dy}{dx}=1$

$$\frac{x-2y+3}{3x-4y+5} \text{ に } y=x+1 \text{ を代入して、} \frac{x-2y+3}{3x-4y+5} = \frac{-x+1}{-x+1} = 1$$

であり、与式が成立するから。

また、 $-x+4y-7=0$ (すなわち $y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}$) も、与式の微分方程式の解である。なぜならば、

$y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}$ を微分して、 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}$

$$\frac{x-2y+3}{3x-4y+5} \text{ に } y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4} \text{ を代入して、} \frac{x-2y+3}{3x-4y+5} = \frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{2x-2} = \frac{1}{4}$$

であり、与式が成立するから。

よって $D=0$ の場合も解に含まれるので、求める解は

$$(-x+y-1)(-x+4y-7)^2 = D \quad (D \text{ は任意の実数})$$

となる。

【解説 16】微分方程式の解法（その 2 線形常微分方程式）

数学定理

以下に、線形常微分方程式の解法（概略）を示す。

線形常微分方程式	1 階	定数係数	同次	方程式	$y' + py = 0$
				一般解	$\frac{dy}{dx} = -py$ とし、変数分離形として解く
				例	$y' + py = 0$ のとき $y = Ce^{-px}$
			非同次	方程式	$y' + py = Q(x)$
				一般解	(ラグランジェの定数変化法) ① $y' + py = 0$ を解いて $y = Ce^{-px}$ ② 定数 C を関数 $C(x)$ と置き換えて $y = C(x)e^{-px}$ これを微分して $y' = C'(x)e^{-px} - pC(x)e^{-px}$ ③ 上記 y 、 y' を与式に代入して式を整理すると $C'(x) = e^{px}Q(x)$ これを直接積分形として解き $C(x) = \int e^{px}Q(x) dx + C$ ④ $C(x)$ を代入して $y = \{ \int e^{px}Q(x) dx + C \} e^{-px}$
				例	$y' - 2y = e^{5x}$ のとき $y = \frac{1}{3}e^{5x} + Ce^{2x}$
		非定数係数	同次	方程式	$y' + P(x)y = 0$
				一般解	$\frac{dy}{dx} = -P(x)y$ とし、変数分離形として解く
				例	$y' + \sin x \times y = 0$ のとき $y = Ce^{\cos x}$
			非同次	方程式	$y' + P(x)y = Q(x)$
				一般解	(ラグランジェの定数変化法) ① $y' + P(x)y = 0$ を解いて $y = Ce^{-\int P(x) dx}$ (前述の同次形を参照) ② 定数 C を関数 $C(x)$ と置き換えて $y = C(x)e^{-\int P(x) dx}$ これを微分して $y' = C'(x)e^{-\int P(x) dx} - P(x)C(x)e^{-\int P(x) dx}$ ③ 上記 y 、 y' を与式に代入して式を整理すると $C'(x) = e^{\int P(x) dx}Q(x)$ これを直接積分形として解き $C(x) = \int e^{\int P(x) dx}Q(x) dx + C$ ④ $C(x)$ を代入して $y = \{ \int e^{\int P(x) dx}Q(x) dx + C \} e^{-\int P(x) dx}$
				例	$y' + \sin x \times y = x^2 e^{\cos x}$ のとき $y = (\frac{1}{3}x^3 + C) e^{\cos x}$

2 階	定 数 係 数	同 次	方程式	$y'' + py' + qy = 0$
			一般解	特性方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ について ① $D > 0$ のとき (2つの実数解を α, β として) $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$ ② $D = 0$ のとき (重解を α として) $y = e^{\alpha x}(C_1 x + C_2)$ ③ $D < 0$ のとき (重解を $a \pm bi$ として) $y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$ (注) 重ね合わせの原理により、1次独立な2つの解(y_1, y_2)が見つれば、すべての解は、その線形結合 ($y_3 = C_1 y_1 + C_2 y_2$) であらわされる。このことにより①～③が解であることが確認される。
			例	① $y'' - 5y' + 6y = 0$ のとき $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ ② $y'' - 12y' + 36y = 0$ のとき $y = e^{6x}(C_1 x + C_2)$ ③ $y'' - 4y' + 13y = 0$ のとき $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ $= e^{2x}\{r \sin(3x + \theta)\}$
		非 同 次	方程式	$y'' + py' + qy = Q(x)$
			一般解	(ラグランジェの定数変化法) ① $y'' + y' + py = 0$ を解いて $y = C_1 F(x) + C_2 G(x)$ ② 定数 C_1, C_2 を関数 $C_1(x), C_2(x)$ と置き換えて微分し y' および y'' を求める。 ③ 上記 y, y', y'' を与式に代入して、 $C_1(x), C_2(x)$ を求める。 (注) このとき、自由度を下げるため $C_1'(x)F(x) + C_2'(x)G(x) = 0$ と決めてしまってもよい。 ④ $C_1(x), C_2(x)$ を代入して解を求める。
			例	① $y'' - 5y' + 6y = e^{5x}$ のとき $y = \frac{1}{6}e^{5x} + De^{2x} + Ee^{3x}$ ② $y'' - 12y' + 36y = e^{5x}$ のとき $y = e^{6x}(Dx + E) + e^{5x}$ ③ $y'' - 4y' + 13y = 3e^{2x}$ のとき $y = \frac{1}{3}e^{2x}\{1 + D \cos 3x + E \sin 3x\} = \frac{1}{3}e^{2x}\{1 + r \sin(3x + \theta)\}$
	非 定 数 係 数	同 次	方程式	$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$
			一般解	一般的な解法は知られていない。 y_1, y_2 が 1 次独立な 2 つの解ならば、一般解は $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$
			例	$(1 - \tan x)y'' + (2 \tan x)y' - (1 + \tan x)y = 0$ のとき $y = C_1 e^x + C_2 \sin x$
		非 同 次	方程式	$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$
			一般解	一般的な解法は知られていない。 Y が解、 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ が対応する同次方程式の解ならば、一般解は $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + Y$
			例	$(1 - \tan x)y'' + (2 \tan x)y' - (1 + \tan x)y = -x - (x - 2) \tan x$ のとき $y = C_1 e^x + C_2 \sin x + x$

【問題 51】微分方程式例題（その 2 線形常微分方程式）

(1) 1 階、定数係数、同次



$y' + py = 0$ の解を求めよ。

式を変形し、

$$\frac{dy}{dx} = -py$$

であるから変数分離形として解くことができる。

① $y \neq 0$ のとき

$$\int \frac{1}{y} dy = -p \int dx$$

$$\log|y| = -px + C$$

$$|y| = e^C \times e^{-px}$$

$$y = (\pm e^C) e^{-px}$$

$$(\pm e^C) = D \text{ とおくと}$$

$$y = De^{-px} \quad (D \neq 0)$$

これはすべての x について $y \neq 0$ であるから条件を満たす。

② $y = 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$y = 0$ (恒等関数) はこの条件を満たす。

また、曲線と x 軸の交点においては傾きが 0、それ以外の点 (つまり $y \neq 0$) のときには

$$y = De^{\frac{1}{2}x^2} \quad (D \neq 0) \text{ であるような関数は、連続関数の中には存在しない。}$$

したがって条件を満たす関数は $y = 0$ (恒等関数) のみである。

① および ② より、解は

$$y = De^{-px} \quad (D \text{ は任意の実数})$$

である。

(2) 1 階、定数係数、非同次



$y' - 2y = e^{5x}$ の解を求めよ。

$$y' - 2y = e^{5x} \quad \cdots \star_1$$

① まず $y' - 2y = 0$ を解く。

同次形として解くと、解は $y = Ce^{2x}$ である。

② C を関数 $C(x)$ に置き換えると

$$y = C(x)e^{2x} \quad \cdots \star_2$$

$$\text{これを微分して } y' = C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x} \quad \cdots \star_3$$

③ $\star_2$ 、 $\star_3$ を $\star_1$ に代入して

$$\{C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x}\} - 2C(x)e^{2x} = e^{5x}$$

$$\text{よって } C'(x) = e^{3x}$$

$$\text{これを積分して } C(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + D$$

④ これを $\star_2$ に代入して

$$y = \left(\frac{1}{3}e^{3x} + D\right)e^{2x} = \frac{1}{3}e^{5x} + De^{2x}$$

(3) 1 階、非定数係数、同次



$y' + \sin x \times y = 0$ の解を求めよ。

式を変形し、

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x \times y$$

であるから変数分離形として解くことができる。

① $y \neq 0$ のとき

$$\int \frac{1}{y} dy = -\int \sin x dx$$

$$\log|y| = \cos x + C$$

$$|y| = e^C \times e^{\cos x}$$

$$y = (\pm e^C) e^{-\cos x}$$

$$(\pm e^C) = D \text{ とおくと}$$

$$y = D e^{\cos x} \quad (D \neq 0)$$

これはすべての x について $y \neq 0$ であるから条件を満たす。

② $y = 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$y = 0$ (恒等関数) はこの条件を満たす。

また、曲線と x 軸の交点においては傾きが 0、それ以外の点 (つまり $y \neq 0$) のときには $y = D e^{\cos x}$ ($D \neq 0$) であるような関数は、連続関数の中には存在しない。

したがって条件を満たす関数は $y = 0$ (恒等関数) のみである。

① および ② より、解は

$$y = D e^{\cos x} \quad (D \text{ は任意の実数})$$

である。

(4) 1 階、非定数係数、非同次



$y' + \sin x \times y = x^2 e^{\cos x}$ の解を求めよ。

$$y' + \sin x \times y = x^2 e^{\cos x} \quad \cdots \star_1$$

① まず $y' + \sin x \times y = 0$ を解く。

同次形として解くと、解は $y = C e^{\cos x}$ である。

② C を関数 $C(x)$ に置き換えると

$$y = C(x) e^{\cos x} \quad \cdots \star_2$$

$$\text{これを微分して } y' = C'(x) e^{\cos x} - \sin x \times C(x) e^{\cos x} \quad \cdots \star_3$$

③ $\star_2$ 、 $\star_3$ を $\star_1$ に代入して

$$\{C'(x) e^{\cos x} - \sin x \times C(x) e^{\cos x}\} + \sin x \times C(x) e^{\cos x} = x^2 e^{\cos x}$$

$$\text{よって } C'(x) = x^2$$

$$\text{これを積分して } C(x) = \frac{1}{3} x^3 + D$$

④ これを $\star_2$ に代入して

$$y = \left(\frac{1}{3} x^3 + D \right) e^{\cos x}$$

(5) 2階、定数係数、同次



次の解を求めよ。

① $y'' - 5y' + 6y = 0$

② $y'' - 12y' + 36y = 0$

③ $y'' - 4y' + 13y = 0$

① $y'' - 5y' + 6y = 0$

特性方程式は $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ であり、 $D > 0$ 、 $\lambda = 2, 3$ である。

よって、解の公式に代入し

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

② $y'' - 12y' + 36y = 0$

特性方程式は $\lambda^2 - 12\lambda + 36 = 0$ であり、 $D = 0$ 、 $\lambda = 6$ の重解である。

よって、解の公式に代入し

$$y = e^{6x}(C_1 x + C_2)$$

③ $y'' - 4y' + 13y = 0$

特性方程式は $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$ であり、 $D < 0$ 、 $\lambda = 2 \pm 3i$ である。

よって、解の公式に代入し

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

または三角関数を合成して

$$y = e^{2x}\{r \sin(3x + \theta)\}$$

(6) ① 2 階、定数係数、非同次 ($D > 0$ の場合)



$y'' - 5y' + 6y = e^{5x}$ の解を求めよ。

$$y'' - 5y' + 6y = e^{5x} \quad \cdots \star_1$$

① まず $y'' - 5y' + 6y = 0$ を解く。

同次形として解くと、解は $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ である。

② C_1, C_2 を関数 $C_1(x), C_2(x)$ に置き換えると

$$y = C_1(x)e^{2x} + C_2(x)e^{3x} \quad \cdots \star_2$$

これを微分して

$$\begin{aligned} y' &= C_1'(x)e^{2x} + 2C_1(x)e^{2x} + C_2'(x)e^{3x} + 3C_2(x)e^{3x} \\ &= \{C_1'(x) + 2C_1(x)\}e^{2x} + \{C_2'(x) + 3C_2(x)\}e^{3x} \quad \cdots \star_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \{C_1''(x) + 2C_1'(x)\}e^{2x} + 2\{C_1'(x)e^{2x} + 2C_1(x)e^{2x}\}e^{2x} \\ &\quad + \{C_2''(x) + 3C_2'(x)\}e^{3x} + 3\{C_2'(x)e^{3x} + 3C_2(x)e^{3x}\}e^{3x} \\ &= \{C_1''(x) + 4C_1'(x) + 4C_1(x)\}e^{2x} + \{C_2''(x) + 6C_2'(x) + 9C_2(x)\}e^{3x} \quad \cdots \star_4 \end{aligned}$$

③ $\star_2, \star_3, \star_4$ を $\star_1$ に代入して

$$\begin{aligned} &[\{C_1''(x) + 4C_1'(x) + 4C_1(x)\}e^{2x} + \{C_2''(x) + 6C_2'(x) + 9C_2(x)\}e^{3x}] \\ &- 5[\{C_1'(x) + 2C_1(x)\}e^{2x} + \{C_2'(x) + 3C_2(x)\}e^{3x}] + 6[C_1(x)e^{2x} + C_2(x)e^{3x}] = e^{5x} \end{aligned}$$

これを整理して

$$\{C_1''(x) - C_1'(x)\} + \{C_2''(x) + C_2'(x)\}e^x = e^{3x} \quad \cdots \star_5$$

ここで、 $C_1(x), C_2(x)$ の自由度を下げるため

$$C_1'(x)e^{2x} + C_2'(x)e^{3x} = 0 \quad \text{すなわち} \quad C_1'(x) + C_2'(x)e^x = 0 \quad \cdots \star_6$$

と置く。

$$\star_6 \text{ を微分し式を整理すると、} \quad C_1''(x) + C_2''(x)e^x = -C_2'(x)e^x$$

$$\text{これを } \star_5 \text{ に代入すると } \quad C_1'(x) = -e^{3x}$$

$$\text{これを } \star_6 \text{ に代入すると } \quad C_2'(x) = e^{2x}$$

$$\text{これらを積分して } \quad C_1(x) = -\frac{1}{3}e^{3x} + D, \quad C_2(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + E \quad \text{となる。}$$

$$\text{これを } \star_2 \text{ に代入して } \quad y = \frac{1}{6}e^{5x} + De^{2x} + Ee^{3x} \quad \text{となる。}$$

② 2 階、定数係数、非同次 ($D = 0$ の場合)

$y'' - 12y' + 36y = e^{5x}$ の解を求めよ。

$$y'' - 12y' + 36y = e^{5x} \quad \cdots \star 1$$

① まず $y'' - 12y' + 36y = 0$ を解く。

同次形として解くと、解は $y = e^{6x}(C_1x + C_2)$ である。

② C_1, C_2 を関数 $C_1(x), C_2(x)$ に置き換えると

$$y = e^{6x}(C_1(x)x + C_2(x)) \quad \cdots \star 2$$

これを微分して

$$\begin{aligned} y' &= 6e^{6x}(C_1(x)x + C_2(x)) + e^{6x}(C_1'(x)x + C_1(x) + C_2'(x)) \\ &= e^{6x}\{(C_1'(x) + 6C_1(x))x + (C_1(x) + C_2'(x) + 6C_2(x))\} \quad \cdots \star 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= 6e^{6x}\{(C_1'(x) + 6C_1(x))x + (C_1(x) + C_2'(x) + 6C_2(x))\} \\ &\quad + e^{6x}\{(C_1''(x) + 6C_1'(x))x + (C_1'(x) + 6C_1(x)) + (C_1'(x) + C_2''(x) + 6C_2'(x))\} \\ &= e^{6x}\{(C_1''(x) + 12C_1'(x) + 36C_1(x))x + (2C_1'(x) + 12C_1(x) + C_2''(x) + 12C_2'(x) + 36C_2(x))\} \quad \cdots \star 4 \end{aligned}$$

③ $\star 2, \star 3, \star 4$ を $\star 1$ に代入して

$$e^{6x} \left[\begin{aligned} &\left\{ \begin{aligned} &C_1'(x) + 12C_1'(x) + 36C_1(x) \\ &-12(C_1'(x) + 6C_1(x)) \end{aligned} \right\} x \\ &+ \left\{ \begin{aligned} &2C_1'(x) + 12C_1(x) + C_2''(x) + 12C_2'(x) + 36C_2(x) \\ &-12(C_1(x) + C_2'(x) + 6C_2(x)) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right] = e^{5x}$$

これを整理して $C_1''(x)x + 2C_1'(x) + C_2''(x) = e^{-x} \quad \cdots \star 5$

ここで、 $C_1(x), C_2(x)$ の自由度を下げるため

$$e^{6x}(C_1'(x)x + C_2'(x)) = 0 \quad \text{すなわち} \quad C_1'(x)x + C_2'(x) = 0 \quad \cdots \star 6$$

と置く。

$\star 6$ を微分し式を整理すると、 $C_1''(x)x + C_2''(x) = -C_1'(x)$

これを $\star 5$ に代入すると $C_1'(x) = e^{-x} \quad \cdots \star 7$

これを $\star 6$ に代入すると $C_2'(x) = -xe^{-x} \quad \cdots \star 8$

★₇を積分して $C_1(x) = -e^{-x} + D$

★₈を積分して $C_2(x) = e^{-x}(x+1) + E$ (部分積分を用いる)

これを★₂に代入して

$$y = e^{6x}\{(-e^{-x} + D)x + e^{-x}(x+1) + E\}$$

$$= e^{6x}(Dx + E) + e^{5x}$$

となる。

③ 2 階、定数係数、非同次 ($D < 0$ の場合)

$y'' - 4y' + 13y = 3e^{2x}$ の解を求めよ。

$$y'' - 4y' + 13y = 3e^{2x} \quad \cdots \star_1$$

① まず $y'' - 4y' + 13y = 0$ を解く。

同次形として解くと、解は $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ である。

② C_1, C_2 を関数 $C_1(x), C_2(x)$ に置き換えると

$$y = e^{2x}(C_1(x) \cos 3x + C_2(x) \sin 3x) \quad \cdots \star_2$$

これを微分して

$$y' = 2e^{2x}(C_1(x) \cos 3x + C_2(x) \sin 3x) + e^{2x}\{(C_1'(x) \cos 3x - 3C_1(x) \sin 3x) + (C_2'(x) \sin 3x + 3C_2(x) \cos 3x)\}$$

$$= e^{2x}\{(C_1'(x) + 2C_1(x) + 3C_2(x)) \cos 3x + (-3C_1(x) + C_2'(x) + 2C_2(x)) \sin 3x\} \quad \cdots \star_3$$

$$y'' = 2e^{2x}\{(C_1'(x) + 2C_1(x) + 3C_2(x)) \cos 3x + (-3C_1(x) + C_2'(x) + 2C_2(x)) \sin 3x\}$$

$$+ e^{2x} \left\{ \begin{array}{l} (C_1''(x) + 2C_1'(x) + 3C_2'(x)) \cos 3x - 3(C_1'(x) + 2C_1(x) + 3C_2(x)) \sin 3x \\ + (-3C_1'(x) + C_2''(x) + 2C_2'(x)) \sin 3x + 3(-3C_1(x) + C_2'(x) + 2C_2(x)) \cos 3x \end{array} \right\}$$

$$= e^{2x} \left\{ \begin{array}{l} (C_1''(x) + 4C_1'(x) - 5C_1(x) + 6C_2'(x) + 12C_2(x)) \cos 3x \\ + (-6C_1'(x) - 12C_1(x) + C_2''(x) + 4C_2'(x) - 5C_2(x)) \sin 3x \end{array} \right\} \quad \cdots \star_4$$

③ $\star_2, \star_3, \star_4$ を $\star_1$ に代入して

$$e^{2x} \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (C_1''(x) + 4C_1'(x) - 5C_1(x) + 6C_2'(x) + 12C_2(x)) \cos 3x \\ + (-6C_1'(x) - 12C_1(x) + C_2''(x) + 4C_2'(x) - 5C_2(x)) \sin 3x \end{array} \right\} \\ - 4 \left\{ \begin{array}{l} (C_1'(x) + 2C_1(x) + 3C_2(x)) \cos 3x \\ + (-3C_1(x) + C_2'(x) + 2C_2(x)) \sin 3x \end{array} \right\} \\ + 13 \left\{ \begin{array}{l} C_1(x) \cos 3x \\ + C_2(x) \sin 3x \end{array} \right\} \end{array} \right] = 3e^{2x}$$

$$\text{これを整理して } (C_1''(x) + 6C_2'(x)) \cos 3x + (-6C_1'(x) + C_2''(x)) \sin 3x = 3 \quad \cdots \star_5$$

ここで、 $C_1(x), C_2(x)$ の自由度を下げるため

$$e^{2x}(C_1'(x) \cos 3x + C_2'(x) \sin 3x) = 0 \quad \text{すなわち} \quad C_1'(x) \cos 3x + C_2'(x) \sin 3x = 0 \quad \cdots \star_6$$

と置く。

$$\star_6 \text{ を微分し式を整理すると、 } C_1''(x) \cos 3x + C_2''(x) \sin 3x = -3C_2'(x) \cos 3x + 3C_1'(x) \sin 3x$$

$$\text{これを } \star_5 \text{ に代入すると } C_2'(x) \cos 3x - C_1'(x) \sin 3x = 1 \quad \cdots \star_7$$

★₆、★₇を $C_1'(x), C_2'(x)$ の連立方程式として解く。

$$\begin{cases} (\cos 3x)C_1'(x) + (\sin 3x)C_2'(x) = 0 \\ (-\sin 3x)C_1'(x) + (\cos 3x)C_2'(x) = 1 \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} C_1'(x) = -\sin 3x \\ C_2'(x) = \cos 3x \end{cases}$$

これを積分して

$$\begin{cases} C_1(x) = \frac{1}{3}(\cos 3x + D) \\ C_2(x) = \frac{1}{3}(\sin 3x + E) \end{cases}$$

これを★₂に代入して

$$\begin{aligned} y &= e^{2x} \left\{ \frac{1}{3}(\cos 3x + D)\cos 3x + \frac{1}{3}(\sin 3x + E)\sin 3x \right\} \\ &= \frac{1}{3}e^{2x}\{1 + D\cos 3x + E\sin 3x\} \end{aligned}$$

または三角関数を合成して

$$y = \frac{1}{3}e^{2x}\{1 + r \sin(3x + \theta)\}$$

(7) 2階、非定数係数、同次



$(1 - \tan x)y'' + (2 \tan x)y' - (1 + \tan x)y = 0$ について次の問いに答えよ。

① $y = e^x$ が与式の解であることを示せ。

$$\begin{cases} y = e^x \\ y' = e^x \text{ であるからこれを代入して} \\ y'' = e^x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= (1 - \tan x)e^x + (2 \tan x)e^x - (1 + \tan x)e^x \\ &= (1 - \tan x + 2 \tan x - 1 - \tan x)e^x = 0 \end{aligned}$$

よって $y = e^x$ は与式の解である。

② $y = \sin x$ が与式の解であることを示せ。

$$\begin{cases} y = \sin x \\ y' = \cos x \text{ であるからこれを代入して} \\ y'' = -\sin x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= (1 - \tan x)(-\sin x) + 2 \tan x \cos x - (1 + \tan x) \sin x \\ &= -\sin x + \tan x \sin x + 2 \sin x - \sin x - \tan x \sin x = 0 \end{aligned}$$

よって $y = \sin x$ は与式の解である。

③ 与式の一般解を求めよ。

①②より、 $y = e^x$ と $y = \sin x$ は与式の1次独立な2つの解であるから、
与式の一般解は

$$y = C_1 e^x + C_2 \sin x$$

(8) 2階、非定数係数、非同次



$(1 - \tan x)y'' + (2 \tan x)y' - (1 + \tan x)y = -x - (x - 2) \tan x$ について次の問いに答えよ。

① $y = x$ が与式の解であることを示せ。

$$\begin{cases} y = x \\ y' = 1 \\ y'' = 0 \end{cases}$$
 であるからこれを代入して
 (左辺) $= (1 - \tan x) \times 0 + (2 \tan x) \times 1 - (1 + \tan x)x$
 $= 2 \tan x - x - x \tan x = -x - (x - 2) \tan x =$ (右辺)
 よって $y = x$ は与式の解である。

② 与式の一般解を求めよ。

(7) より
 $(1 - \tan x)y'' + (2 \tan x)y' - (1 + \tan x)y = 0$
 の一般解は
 $y = C_1 e^x + C_2 \sin x$

また①より
 $y = x$
 は与式の一つの解

よって与式の一般解は
 $y = C_1 e^x + C_2 \sin x + x$

【解説 17】 主要な運動方程式の解

数学定理

以下に、主要な運動方程式の解を示す。

等速直線運動	運動方程式	$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0$
	解法	直接積分形（2段階）
	一般解	$x = C_1 t + C_2$ $x' = C_1$ $x'' = 0$
等加速度運動	運動方程式	$m \frac{d^2x}{dt^2} = F$
	解法	直接積分形（2段階）
	一般解	$x = \frac{1}{2} \left(\frac{F}{m} \right) t^2 + C_1 t + C_2$ $x' = \left(\frac{F}{m} \right) t + C_1$ $x'' = \frac{F}{m}$
等速直線運動 (抵抗あり)	運動方程式	$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \frac{dx}{dt}$
	解法	線形常微分方程式（2階、定数係数、同次、 $D>0$ ） (別解 $\frac{dx}{dt} = v$ として、 v に関する変数分離形として解く)
	一般解	$x = C_1 e^{-\frac{k}{m}t} + C_2$ $x' = -C_1 \frac{k}{m} e^{-\frac{k}{m}t}$ $x'' = C_1 \left(\frac{k}{m} \right)^2 e^{-\frac{k}{m}t}$
等加速度運動 (抵抗あり)	運動方程式	$m \frac{d^2x}{dt^2} = F - k \frac{dx}{dt}$
	解法	線形常微分方程式（2階、定数係数、非同次、 $D>0$ ） (別解 $\frac{dx}{dt} = v$ として、 v に関する変数分離形として解く)
	一般解	$x = C_1 e^{-\frac{k}{m}t} + \left(\frac{F}{k} \right) t + C_2$ $x' = -C_1 \frac{k}{m} e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{F}{k}$ $x'' = C_1 \left(\frac{k}{m} \right)^2 e^{-\frac{k}{m}t}$
単振動	運動方程式	$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (k > 0)$
	解法	線形常微分方程式（2階、定数係数、同次、 $D<0$ ）
	一般解	$\omega = \sqrt{\frac{m}{k}}$ として $x = A \sin(\omega t + \theta)$ $x' = \omega A \cos(\omega t + \theta)$ $x'' = -\omega^2 A \sin(\omega t + \theta)$

【問題 52】 運動方程式の解：等速直線運動

(1) $m \frac{d^2x}{dt^2} = 0$ のとき、 x 、 x' 、 x'' を求めよ。

(2) 初期条件を、 $t = t_0$ のとき $x = x_0$ 、 $x' = v_0$ とするとき、 x 、 x' 、 x'' を求めよ。

(1) 与式より

$$x'' = 0$$

これを順次積分して

$$x' = C_1$$

$$x = C_1 t + C_2$$

以上より

$$\begin{cases} x = C_1 t + C_2 \\ x' = C_1 \\ x'' = 0 \end{cases}$$

(2) 初期条件より

$$\begin{cases} C_1 t_0 + C_2 = x_0 \\ C_1 = v_0 \end{cases}$$

これを解いて

$$\begin{cases} C_1 = v_0 \\ C_2 = -v_0 t_0 + x_0 \end{cases}$$

これを x 、 x' 、 x'' に代入して

$$\begin{cases} x = v_0(t - t_0) + x_0 \\ x' = v_0 \\ x'' = 0 \end{cases}$$

【問題 53】運動方程式の解：等加速度運動

(1) $m \frac{d^2x}{dt^2} = F$ のとき、 x 、 x' 、 x'' を求めよ。

(2) 初期条件を、 $t = t_0$ のとき $x = x_0$ 、 $x' = v_0$ とするとき、 x 、 x' 、 x'' を求めよ。

(1) 与式より

$$x'' = \frac{F}{m}$$

これを順次積分して

$$x' = \left(\frac{F}{m}\right)t + C_1$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{m}\right)t^2 + C_1t + C_2$$

以上より

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{m}\right)t^2 + C_1t + C_2 \\ x' = \left(\frac{F}{m}\right)t + C_1 \\ x'' = \frac{F}{m} \end{cases}$$

(2) 初期条件より

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{F}{m}\right)t_0^2 + C_1t_0 + C_2 = x_0 \\ \left(\frac{F}{m}\right)t_0 + C_1 = v_0 \end{cases}$$

これを解いて

$$\begin{cases} C_1 = -\left(\frac{F}{m}\right)t_0 + v_0 \\ C_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{m}\right)t_0^2 - v_0t_0 + x_0 \end{cases}$$

これを x に代入して

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{F}{m} \right) t^2 + \left\{ - \left(\frac{F}{m} \right) t_0 + v_0 \right\} t + \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{F}{m} \right) t_0^2 - v_0 t_0 + x_0 \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{F}{m} \right) (t^2 - 2t_0 t + t_0^2) + v_0 t - v_0 t_0 + x_0$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{F}{m} \right) (t - t_0)^2 + v_0 (t - t_0) + x_0$$

x' 、 x'' にも代入して

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \left(\frac{F}{m} \right) (t - t_0)^2 + v_0 (t - t_0) + x_0 \\ x' = \left(\frac{F}{m} \right) (t - t_0) + v_0 \\ x'' = \frac{F}{m} \end{cases}$$

【問題 54】運動方程式の解：等速直線運動（抵抗あり）

(1) $m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \frac{dx}{dt}$ のとき、 x 、 x' 、 x'' を求めよ。

(2) 初期条件を、 $t = t_0$ のとき $x = x_0$ 、 $x' = v_0$ とするとき、 x 、 x' 、 x'' を求めよ。

(1) 与式より

$$x'' + \frac{k}{m} x' = 0$$

特性方程式は $\lambda^2 + \frac{k}{m} \lambda = 0$ 、よって $D > 0$ であり、特性方程式の解は $\lambda = 0, -\frac{k}{m}$

したがって解の公式より x が求まり、 x' 、 x'' はそれを順次微分して

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-\frac{k}{m}t} + C_2 \\ x' = -C_1 \frac{k}{m} e^{-\frac{k}{m}t} \\ x'' = C_1 \left(\frac{k}{m}\right)^2 e^{-\frac{k}{m}t} \end{cases}$$

【別解】

$x' = v$ とおくと、与式は

$$v' = -\frac{k}{m} v$$

これを変数分離形として解くと、

$$\int \frac{1}{v} dt = -\frac{k}{m} \int dt$$

$$\log|v| = -\frac{k}{m}t + C_1$$

$$|v| = e^{C_1} e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v = \pm e^{C_1} e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v = c_2 e^{-\frac{k}{m}t} \quad (c_2 \neq 0)$$

$c_2 = 0$ は解であるので、

$$v = c_3 e^{-\frac{k}{m}t}$$

(2) 初期条件より

$$\begin{cases} C_1 e^{-\frac{k}{m}t_0} + C_2 = x_0 \\ -C_1 \frac{k}{m} e^{-\frac{k}{m}t_0} = v_0 \end{cases}$$

これを解いて

$$\begin{cases} C_1 = -\left(\frac{mv_0}{k}\right) e^{\frac{k}{m}t_0} \\ C_2 = \frac{mv_0}{k} + x_0 \end{cases}$$

これを x に代入して

$$\begin{aligned} x &= -\left(\frac{mv_0}{k}\right) e^{\frac{k}{m}t_0} e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mv_0}{k} + x_0 \\ &= x_0 + \frac{mv_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)}\right) \end{aligned}$$

x' 、 x'' にも代入して

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{mv_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)}\right) \\ x' = v_0 e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} \\ x'' = -\frac{kv_0}{m} e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} \end{cases}$$

【問題 55】運動方程式の解：等加速度運動（抵抗あり）

(1) $m \frac{d^2x}{dt^2} = F - k \frac{dx}{dt}$ のとき、 x 、 x' 、 x'' を求めよ。

(2) 初期条件を、 $t = t_0$ のとき $x = x_0$ 、 $x' = v_0$ とするとき、 x 、 x' 、 x'' を求めよ。

▶ Video

(1) 与式より

$$x'' + \frac{k}{m} x' = \frac{F}{m} \quad \cdots \star_1$$

① まず $x'' + \frac{k}{m} x' = 0$ を解く。等速直線運動（抵抗あり）と同じなので

$$x = C_1 e^{-\frac{k}{m}t} + C_2$$

② C_1, C_2 を関数 $C_1(t), C_2(t)$ に置き換えると

$$x = C_1(t) e^{-\frac{k}{m}t} + C_2(t) \quad \cdots \star_2$$

これを微分して

$$x' = \left\{ C_1'(t) - \frac{k}{m} C_1(t) \right\} e^{-\frac{k}{m}t} + C_2'(t) \quad \cdots \star_3$$

$$x'' = \left\{ C_1''(t) - 2 \frac{k}{m} C_1'(t) + \left(\frac{k}{m} \right)^2 C_1(t) \right\} e^{-\frac{k}{m}t} + C_2''(t) \quad \cdots \star_4$$

③ $\star_2, \star_3, \star_4$ を $\star_1$ に代入して

$$\left\{ C_1''(t) - 2 \frac{k}{m} C_1'(t) + \left(\frac{k}{m} \right)^2 C_1(t) \right\} e^{-\frac{k}{m}t} + C_2''(t) + \frac{k}{m} \left\{ C_1(t) - \frac{k}{m} C_1(t) \right\} e^{-\frac{k}{m}t} + C_2'(t) = \frac{F}{m}$$

$$\left\{ C_1''(t) - \frac{k}{m} C_1'(t) \right\} e^{-\frac{k}{m}t} + C_2''(t) + \frac{k}{m} C_2'(t) = \frac{F}{m} \quad \cdots \star_5$$

ここで、 $C_1(x), C_2(x)$ の自由度を下げるため

$$C_1'(t) e^{-\frac{k}{m}t} + C_2'(t) = 0 \quad \cdots \star_6$$

と置く。

$\star_6$ を微分し式を整理すると、 $C_1''(t) e^{-\frac{k}{m}t} + C_2''(t) = \frac{k}{m} C_1'(t) e^{-\frac{k}{m}t}$

これを $\star_5$ に代入すると $\frac{k}{m} C_1'(t) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{k}{m} C_1'(t) e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{k}{m} C_2'(t) = \frac{F}{m}$

よって

$$C_2'(t) = \frac{F}{k} \quad \cdots \star_7$$

これを $\star_6$ に代入すると

$$C_1'(t) e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{F}{k} = 0$$

よって

$$C_1'(t) = -\frac{F}{k} e^{\frac{k}{m}t} \quad \cdots \star_8$$

★₈を積分して $C_1(t) = -\frac{Fm}{k^2} e^{\frac{k}{m}t} + D$

★₇を積分して $C_2(x) = \frac{F}{k} t + E$ (部分積分を用いる)

これを★₂に代入して

$$\begin{aligned} x &= \left\{ -\frac{Fm}{k^2} e^{\frac{k}{m}t} + D \right\} e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{F}{k} t + E \\ &= -\frac{Fm}{k^2} + D e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{F}{k} t + E \\ &= D e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{F}{k} t + E \quad \left(-\frac{Fm}{k^2} + E \text{を、} E \text{と書き換えた。} \right) \end{aligned}$$

となる。

また x' 、 x'' はそれを順次微分して

$$\begin{cases} x = D e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{F}{k} t + E \\ x' = -\frac{k}{m} D e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{F}{k} \\ x'' = \left(\frac{k}{m} \right)^2 D e^{-\frac{k}{m}t} \end{cases}$$

【別解】

$x' = v$ とおくと、与式は

$$v' = \frac{F}{m} - \frac{k}{m} v$$

ここで、 $\frac{F}{m} - \frac{k}{m} v = \tilde{v}$ とおくと、 $v' = -\frac{m}{k} \tilde{v}'$ であるから

$$-\frac{m}{k} \tilde{v}' = \tilde{v}$$

これを変数分離形として解くと、

$$\int \frac{1}{\tilde{v}} dt = -\frac{k}{m} \int dt$$

$$\log |\tilde{v}| = -\frac{k}{m} t + C_1$$

$$|\tilde{v}| = e^{C_1} e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$\tilde{v} = \pm e^{C_1} e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$\tilde{v} = c_2 e^{-\frac{k}{m}t} \quad (c_2 \neq 0)$$

$c_2 = 0$ は解であるので、

$$\tilde{v} = c_3 e^{-\frac{k}{m}t}$$

これと $\frac{F}{m} - \frac{k}{m} v = \tilde{v}$ より

$$\begin{aligned} v &= -\frac{m}{k} \tilde{v} + \frac{F}{k} \\ &= -\frac{m}{k} c_3 e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{F}{k} \\ &= c_4 e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{F}{k} \end{aligned}$$

これを両辺積分して

$$\begin{aligned} x &= -\frac{k}{m} c_4 e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{F}{k} t + c_5 \\ &= c_6 e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{F}{k} t + c_5 \end{aligned}$$

(2) 初期条件より

$$\begin{cases} De^{-\frac{k}{m}t_0} + \frac{F}{k}t_0 + E = x_0 \\ -D\frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t_0} + \frac{F}{k} = v_0 \end{cases}$$

これを解いて

$$\begin{cases} D = -\frac{m}{k}\left(v_0 - \frac{F}{k}\right)e^{\frac{k}{m}t_0} \\ E = x_0 - \frac{F}{k}t_0 + \frac{m}{k}\left(v_0 - \frac{F}{k}\right) \end{cases}$$

これを x 、 x' 、 x'' に代入して

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{F}{k}(t - t_0) + \frac{m}{k}\left(v_0 - \frac{F}{k}\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)}\right) \\ x' = \left(v_0 - \frac{F}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} + \frac{F}{k} \\ x'' = -\frac{k}{m}\left(v_0 - \frac{F}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} \end{cases}$$

【問題 56】運動方程式の解：単振動

(1) $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ ($k > 0$) のとき、 x 、 x' 、 x'' を求めよ。

(2) 初期条件を、 $t = t_0$ のとき $x = x_0$ 、 $x' = v_0$ とする。また、初期位相 ($t = t_0$ のときの位相角) を θ_0 とする。このとき、 x 、 x' 、 x'' を求めよ。



(1) 与式より

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0 \quad (k > 0)$$

特性方程式は $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$ 、よって $D < 0$ であり、特性方程式の解は $\lambda = 0 \pm \sqrt{\frac{k}{m}}i$

したがって解の公式より x

$$x = e^0 \left(C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t \right) = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t$$

x' 、 x'' はそれを順次微分して

$$\begin{cases} x = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t \\ x' = -C_1 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t \\ x'' = -C_1 \frac{k}{m} \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t - C_2 \frac{k}{m} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t \end{cases}$$

三角関数を合成すると

$$\begin{cases} x = A \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta \right) \\ x' = \sqrt{\frac{k}{m}}A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta \right) \\ x'' = -\frac{k}{m}A \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta \right) \end{cases}$$

と書くことができる。

(2) 初期条件より

$$\begin{cases} x_0 = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t_0 + \theta\right) \\ v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t_0 + \theta\right) \\ \omega t_0 + \theta = \theta_0 \end{cases}$$

であるので、 $x_0^2 + \left(\sqrt{\frac{m}{k}}v_0\right)^2 = A^2\{\sin^2(\omega t_0 + \theta) + \cos^2(\omega t_0 + \theta)\} = A^2$ より $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{mv_0}{k}\right)^2}$

また、 $\sqrt{\frac{k}{m}}t_0 + \theta = \theta_0$ より $\theta = -\sqrt{\frac{k}{m}}t_0 + \theta_0$ であるから、 $\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta = \sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) + \theta_0$

よって、

$$\begin{cases} x = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{mv_0}{k}\right)^2} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) + \theta_0\right) \\ x' = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{mv_0}{k}\right)^2} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) + \theta_0\right) \\ x'' = -\frac{k}{m}\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{mv_0}{k}\right)^2} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) + \theta_0\right) \end{cases}$$

(注) 角速度を ω 、振幅を A と書くと、

$$\begin{cases} x = A \sin(\omega(t - t_0) + \theta_0) \\ x' = \omega A \cos(\omega(t - t_0) + \theta_0) \\ x'' = -\omega^2 A \sin(\omega(t - t_0) + \theta_0) \end{cases}$$

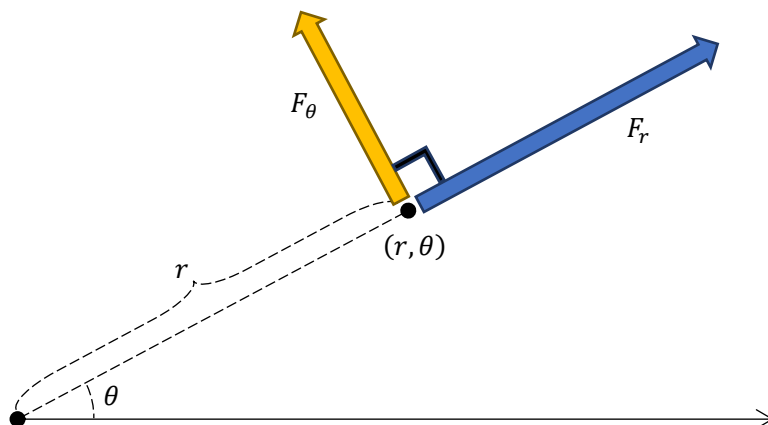
$$\text{ここで、} A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{mv_0}{k}\right)^2}, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

と書ける。

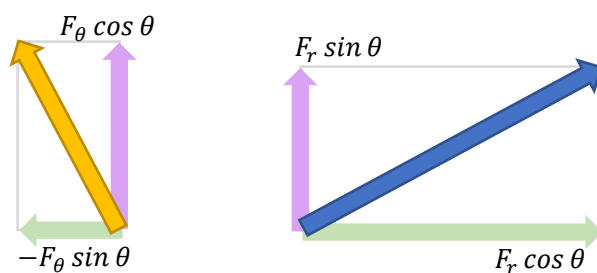
【解説 18】 運動方程式の極座標変換

数学的定義

【力の半径方向成分と円周方向成分】



【力の直角座標成分】



数学定理

【極座標系における運動方程式】

上図より直角座標における運動方程式は

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = F_r \cos \theta - F_\theta \sin \theta \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = F_r \sin \theta + F_\theta \cos \theta \end{cases}$$

これを F_r 、 F_θ の連立方程式として解くと

$$\begin{cases} F_r = m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \cos \theta + \frac{d^2y}{dt^2} \sin \theta \right) \\ F_\theta = m \left(-\frac{d^2x}{dt^2} \sin \theta + \frac{d^2y}{dt^2} \cos \theta \right) \end{cases}$$

一方、 $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ より

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 r}{dt^2} \cos \theta - 2 \frac{dr}{dt} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} - r \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - r \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 r}{dt^2} \sin \theta + 2 \frac{dr}{dt} \cos \theta \frac{d\theta}{dt} - r \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} \end{cases}$$

これを F_r 、 F_θ に代入すると

$$\begin{cases} F_r = m \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} \\ F_\theta = m \left\{ 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right\} \end{cases}$$

F_θ を変形して

$$\begin{cases} F_r = m \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} \\ F_\theta = m \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \end{cases}$$

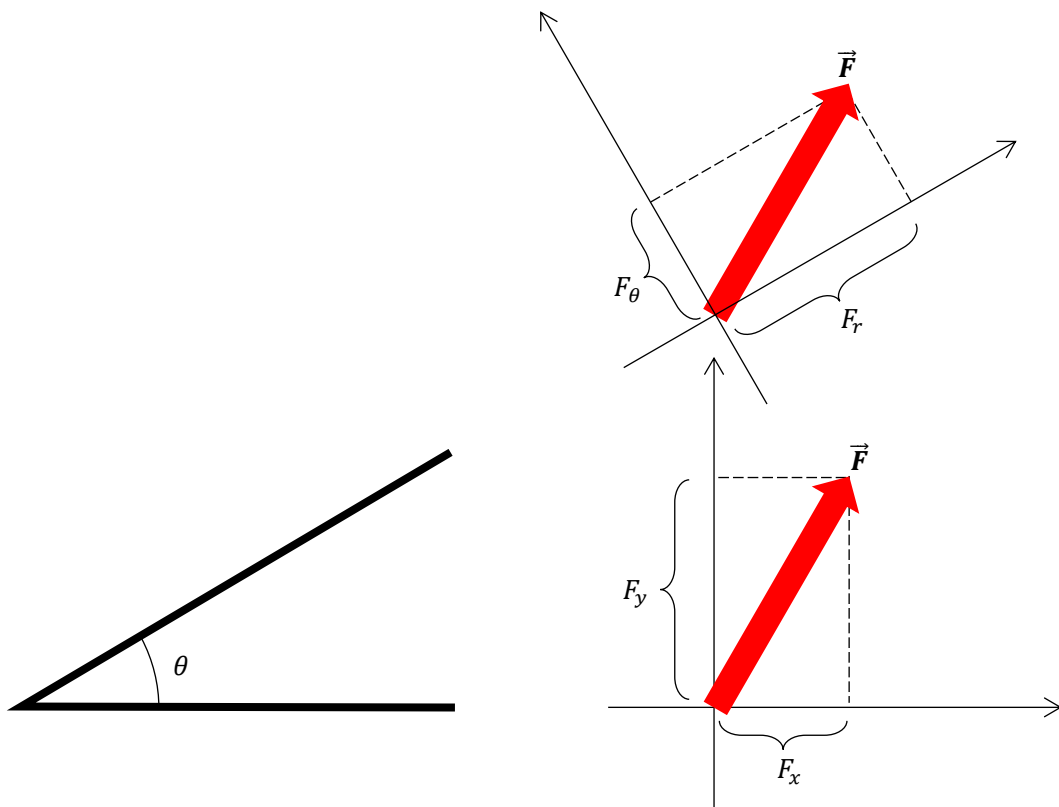
・・・極座標系における運動方程式

【問題 57】 運動方程式の極座標変換

(1) ベクトル $\vec{F}$ の極座標成分への分解を (F_r, F_θ) 、直交座標成分への分解を (F_x, F_y) とする。
 (F_r, F_θ) を θ 回転させたベクトルが (F_x, F_y) であることから、 F_x および F_y を F_r, F_θ, θ の式で表せ。
 同様に、 (F_x, F_y) を $-\theta$ 回転させたベクトルが (F_r, F_θ) であることから、 F_r および F_θ を F_x, F_y, θ の式で表せ。

▶Video

▶Video



(1) 回転の公式より

$$\begin{cases} F_x = F_r \cos \theta - F_\theta \sin \theta \\ F_y = F_r \sin \theta + F_\theta \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_r = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta \\ F_\theta = -F_x \sin \theta + F_y \cos \theta \end{cases}$$

(2) $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ より

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \cos \theta - 2 \frac{dr}{dt} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} - r \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - r \sin \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \sin \theta + 2 \frac{dr}{dt} \cos \theta \frac{d\theta}{dt} - r \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r \cos \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{cases}$$

であることを示せ。

(2) $x = r \cos \theta$ を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

これをさらに微分して

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \left(\frac{d^2r}{dt^2} \cos \theta - \frac{dr}{dt} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \right) - \left(\frac{dr}{dt} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \sin \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \\ &= \frac{d^2r}{dt^2} \cos \theta - 2 \frac{dr}{dt} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} - r \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - r \sin \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{aligned}$$

また、 $y = r \sin \theta$ を t で微分すると

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

これをさらに微分して

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= \left(\frac{d^2r}{dt^2} \sin \theta + \frac{dr}{dt} \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right) + \left(\frac{dr}{dt} \cos \theta \frac{d\theta}{dt} - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \cos \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \\ &= \frac{d^2r}{dt^2} \sin \theta + 2 \frac{dr}{dt} \cos \theta \frac{d\theta}{dt} - r \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r \cos \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{aligned}$$

(2) 下記①～③を用いて、

$$\begin{cases} F_r = m \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} \\ F_\theta = m \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \end{cases}$$

であることを示せ。

①直交座標系における運動方程式

$$\begin{cases} F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} \\ F_y = m \frac{d^2 y}{dt^2} \end{cases}$$

② (1) より

$$\begin{cases} F_r = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta \\ F_\theta = -F_x \sin \theta + F_y \cos \theta \end{cases}$$

③ (2) より

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 r}{dt^2} \cos \theta - 2 \frac{dr}{dt} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} - r \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - r \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 r}{dt^2} \sin \theta + 2 \frac{dr}{dt} \cos \theta \frac{d\theta}{dt} - r \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} \end{cases}$$

①の F_x, F_y を②に代入すると

$$\begin{cases} F_r = m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \cos \theta + \frac{d^2 y}{dt^2} \sin \theta \right) \\ F_\theta = m \left(-\frac{d^2 x}{dt^2} \sin \theta + \frac{d^2 y}{dt^2} \cos \theta \right) \end{cases}$$

これに③の $\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}$ を代入すると

$$\begin{aligned} F_r &= m \left[\left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} \cos \theta - 2 \frac{dr}{dt} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} - r \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - r \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right\} \cos \theta \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} \sin \theta + 2 \frac{dr}{dt} \cos \theta \frac{d\theta}{dt} - r \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right\} \sin \theta \right] \\ &= m \left[\left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{dr}{dt} \sin \theta \cos \theta \frac{d\theta}{dt} - r \cos^2 \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - r \sin \theta \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{dr}{dt} \sin \theta \cos \theta \frac{d\theta}{dt} - r \sin^2 \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r \sin \theta \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right\} \right] \\ &= m \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{\theta} &= m \left[-\left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} \cos \theta - 2 \frac{dr}{dt} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} - r \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - r \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right\} \sin \theta \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} \sin \theta + 2 \frac{dr}{dt} \cos \theta \frac{d\theta}{dt} - r \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right\} \cos \theta \right] \\
 &= m \left[-\left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} \sin \theta \cos \theta - 2 \frac{dr}{dt} \sin^2 \theta \frac{d\theta}{dt} - r \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - r \sin^2 \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} \sin \theta \cos \theta + 2 \frac{dr}{dt} \cos^2 \theta \frac{d\theta}{dt} - r \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r \cos^2 \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right\} \right] \\
 &= m \left\{ 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right\}
 \end{aligned}$$

また、

$$m \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = m \frac{1}{r} \left(2r \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) = m \left\{ 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right\} = F_{\theta}$$

である。

以上より

$$\begin{cases} F_r = m \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} \\ F_{\theta} = m \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \end{cases}$$

が示された。

【問題 58】運動方程式（極座標）の解：螺旋

螺旋状の坂道があり、中心軸からの距離が r で偏角が θ の位置における標高 $\phi(r, \theta)$ が、

$$\phi(r, \theta) = \theta$$

で表されるとする。

いま時刻 $t = 0$ において (r_0, θ_0) の位置に質量 m の物体を静かにおいたところ、坂道を転がり始めた。（摩擦や抵抗はないものとする。）

（１）位置 (r, θ) において物体にかかる力の水平方向成分(= $\vec{F}(r, \theta)$ とおく)を求めよ。また $\vec{F}(r, \theta)$ の半径方向成分 F_r 、円周方向成分 F_θ を求めよ。ただし重力加速度を g とする。（ヒント：【問題 38】を参照のこと）

（１）【問題 38】より

$$\vec{F}(r, \theta) = \frac{m}{r}(-\sin \theta, \cos \theta) = \frac{m}{r}\left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

したがって

$$\begin{cases} F_r = 0 \\ F_\theta = -\frac{m}{r} \end{cases}$$

(2) 物体の中心軸からの距離 r と偏角 θ を時刻 t の関数とすると、 $r^3 r'' = t^2$ が成り立つことを示せ。

(2) 運動方程式に F_r, F_θ を代入し

$$\begin{cases} 0 = m \left\{ \frac{d^2 r(t)}{dt^2} - r(t) \left(\frac{d\theta(t)}{dt} \right)^2 \right\} \\ -\frac{m}{r(t)} = m \frac{1}{r(t)} \frac{d}{dt} \left(r(t)^2 \frac{d\theta(t)}{dt} \right) \end{cases}$$

これを整理して

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} = r(t) \left(\frac{d\theta(t)}{dt} \right)^2 \cdots \star_1$$

$$-1 = \frac{d}{dt} \left(r(t)^2 \frac{d\theta(t)}{dt} \right) \cdots \star_2$$

$\star_2$ の両辺を積分し、

$$r(t)^2 \frac{d\theta(t)}{dt} = -t + C$$

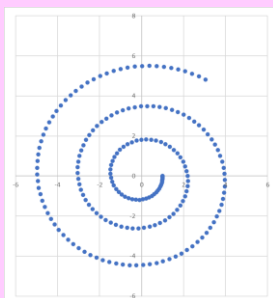
題意より時刻 $t = 0$ において $\frac{d\theta(t)}{dt} = 0$ であり、したがって $C = 0$ なので、

$$r(t)^2 \frac{d\theta(t)}{dt} = -t \quad \text{よって} \quad \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{-t}{r(t)^2} \cdots \star_3$$

$\star_3$ を $\star_1$ に代入して

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} = r(t) \left(\frac{-t}{r(t)^2} \right)^2 \quad \text{よって} \quad r(t)^3 \frac{d^2 r(t)}{dt^2} = t^2 \cdots \star_4$$

(注) このことから、 $\frac{dr(t)}{dt}$ は正であり、この物体は中心軸から離れる方向に転がることがわかる。下記は数値計算による物体の軌跡(例)である。



【解説 19】天体軌道

以下において、太陽の質量 M は天体の質量 m に比べて十分に大きいとする。

数学定理

ケプラーの第1法則

太陽の周りを運動する天体の軌道は、次の2次関数で表わされる。

$$r = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1 - \frac{Ah^2}{GM} \cos(\theta + \alpha)} = \frac{l}{1 - \varepsilon \cos(\theta + \alpha)} \quad \left(\begin{array}{ll} \text{半直弦} & l = \frac{h^2}{GM} \\ \text{離心率} & \varepsilon = \frac{Ah^2}{GM} \end{array} \right)$$

(注) ε の値により、次のように分類される。

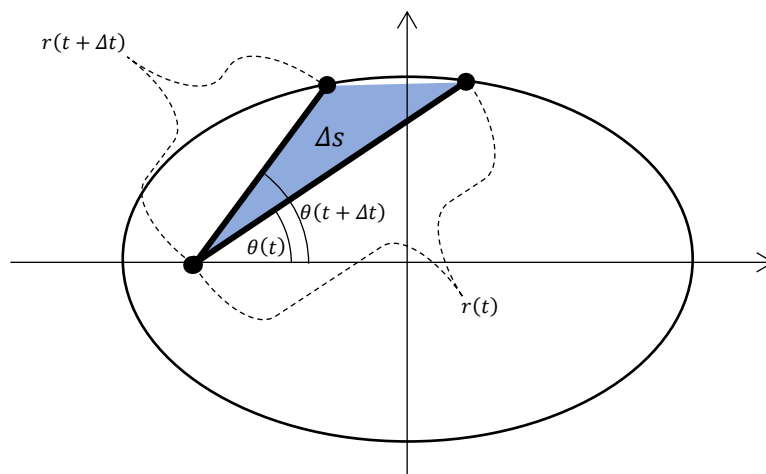
$$\left\{ \begin{array}{lll} \varepsilon = 0 & (A = 0) & \text{のとき} \cdots \cdots \text{円} \\ 0 < \varepsilon < 1 & \left(0 < A < \frac{GM}{h^2} \right) & \text{のとき} \cdots \cdots \text{楕円} \\ \varepsilon = 1 & \left(A = \frac{GM}{h^2} \right) & \text{のとき} \cdots \cdots \text{放物線} \\ 1 < \varepsilon & \left(\frac{GM}{h^2} < A \right) & \text{のとき} \cdots \cdots \text{双曲線} \end{array} \right.$$

(注) 特に楕円軌道の場合を指して「ケプラーの第1法則」と呼ぶ。

数学定理

ケプラーの第2法則

天体と太陽とを結ぶ線分が単位時間に描く面積（面積速度 $\frac{ds}{dt}$ ）は、一定である。



数学定理

ケプラーの第 3 法則

天体の回転周期の 2 乗は、軌道長半径の 3 乗に比例する。

【問題 59】天体軌道の算出

太陽の質量 M は天体の質量 m に比べて十分に大きいものとし、万有引力の法則を用いて、
(1) 天体の軌道が太陽を焦点（又は中心）とする円、楕円、放物線、双曲線のいずれかであることを証明せよ。（ケプラーの第1法則）

▶Video

▶Video

万有引力の法則より $F_r = -\frac{GmM}{r^2}$ 、 $F_\theta = 0$ なので、これらを運動方程式に代入すると

$$-\frac{GmM}{r^2} = m \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} \cdots \star_1$$

$$0 = m \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \cdots \star_2$$

★₂より $0 = \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right)$ であるから、これを積分し

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h \cdots \star_3 \quad (\text{注) 面積速度一定の法則 (ケプラーの第二法則)})$$

★₃より $\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}$ であるから、これを★₁に代入し式を整理すると

$$-\frac{GmM}{r^2} = m \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{h}{r^2} \right)^2 \right\} \quad \text{より} \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2} \cdots \star_4$$

ここで $u = \frac{1}{r}$ とおくと、

$$\star_3 \text{より} \quad \frac{d\theta}{dt} = hu^2 \cdots \star_5$$

$$\star_4 \text{より} \quad \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{u} \right) = h^2 u^3 - GM u^2 \cdots \star_6$$

以下、 u を θ の関数として微分方程式を解くことを考える。 $\frac{1}{u}$ を順次微分し、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u} \right) = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (\star_5 \text{を代入して}) \quad = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} hu^2 = -h \frac{du}{d\theta}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{u} \right) = -h \frac{d}{dt} \frac{du}{d\theta} = -h \frac{d}{d\theta} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (\star_5 \text{を代入して}) \quad = -h \frac{d^2 u}{d\theta^2} hu^2 = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

これを★₆に代入し式を整理すると

$$-h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} = h^2 u^3 - GM u^2 \quad \text{より} \quad \frac{d^2 u}{d\theta^2} = -u + \frac{GM}{h^2} \cdots \star_7$$

ここで $\tilde{u} = -u + \frac{GM}{h^2}$ とおくと

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{d\theta^2} = -\tilde{u}$$

これを2階の定数係数線形同次常微分方程式として解くと、

$$\tilde{u} = A \cos(\theta + \alpha)$$

である。

すなわち $-u + \frac{GM}{h^2} = A \cos(\theta + \alpha)$ したがって $-\frac{1}{r} + \frac{GM}{h^2} = A \cos(\theta + \alpha)$ であるから、

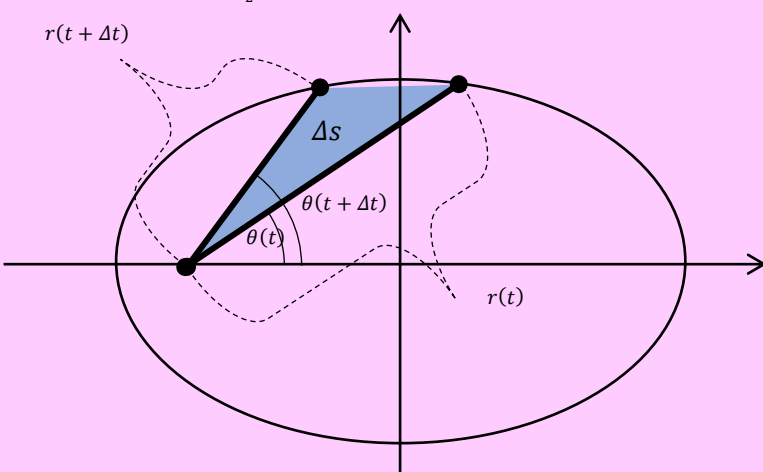
$$r = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1 - \frac{Ah^2}{GM} \cos(\theta + \alpha)} = \frac{l}{1 - \varepsilon \cos(\theta + \alpha)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{半直弦} \quad l = \frac{h^2}{GM} \\ \text{離心率} \quad \varepsilon = \frac{Ah^2}{GM} \end{array} \right)$$

これは、
$$\begin{cases} \varepsilon = 0 & (A = 0) & \text{のとき} \cdots \cdots \text{円} \\ 0 < \varepsilon < 1 & \left(0 < A < \frac{GM}{h^2} \right) & \text{のとき} \cdots \cdots \text{楕円} \\ \varepsilon = 1 & \left(A = \frac{GM}{h^2} \right) & \text{のとき} \cdots \cdots \text{放物線} \\ 1 < \varepsilon & \left(\frac{GM}{h^2} < A \right) & \text{のとき} \cdots \cdots \text{双曲線} \end{cases} \quad \text{となる。}$$

(注) 特に楕円軌道の場合を指して「ケプラーの第1法則」と呼ぶ。

(2) 天体と太陽とを結ぶ線分が単位時間に描く面積（面積速度）が一定であることを証明せよ。（ケプラーの第二法則）

下図より $\Delta s \approx \frac{1}{2}r(t)r(t+\Delta t)\sin(\theta(t+\Delta t)-\theta(t))$



Δt で除して $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{2}r(t)r(t+\Delta t)\frac{\sin(\theta(t+\Delta t)-\theta(t))}{\theta(t+\Delta t)-\theta(t)} \times \frac{\theta(t+\Delta t)-\theta(t)}{\Delta t}$

$\Delta t \rightarrow 0$ のとき $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}r(t)^2 \frac{d\theta}{dt}$

運動方程式より $r(t)^2 \frac{d\theta}{dt} = h$ (定数) なので、

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}h$$

したがって、天体と太陽とを結ぶ線分が単位時間に描く面積（面積速度 $\frac{ds}{dt}$ ）は、一定である。

(3) 天体の回転周期の2乗が軌道長半径の3乗に比例することを証明せよ。(ケプラーの第三法則)

楕円の面積を S 、物体の回転周期を T とすると、

$$S = \int_0^T \left(\frac{ds}{dt} \right) dt = \int_0^T \left(\frac{1}{2} h \right) dt = \frac{1}{2} h [t]_0^T = \frac{1}{2} h T \quad \text{よって} \quad T = \frac{2}{h} S \cdots \star_1$$

また、半直弦 $l = \frac{h^2}{GM}$ 、離心率 ε の楕円は

$$\text{長半径} \quad \frac{l}{1-\varepsilon^2} = \frac{h^2}{(1-\varepsilon^2)GM}$$

$$\text{短半径} \quad \frac{l}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{h^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}GM}$$

であるので、楕円の面積 S は

$$S = \pi \left(\frac{h^2}{(1-\varepsilon^2)GM} \right) \left(\frac{h^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}GM} \right) = \pi \frac{h^4}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}} G^2 M^2} \cdots \star_2$$

である。

$\star_1$ 、 $\star_2$ より

$$T^2 = \frac{4}{h^2} \left(\pi \frac{h^4}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}} G^2 M^2} \right)^2 = 4\pi^2 \frac{h^6}{(1-\varepsilon^2)^3 G^4 M^4} = \left(\frac{4\pi^2}{GM} \right) \times \left(\frac{h^2}{(1-\varepsilon^2)GM} \right)^3$$

であり、したがって、回転周期の2乗は、軌道長半径の3乗に比例する。

【問題 60】地球軌道の算出

地球公転軌道（注：楕円である）の遠点距離を $r_{far} = 1.521 \times 10^{11}m$ 、近点距離を $r_{near} = 1.471 \times 10^{11}m$ とする。

（注）遠点距離（ r_{far} ）・・・地球と太陽が最も離れる距離

近点距離（ r_{near} ）・・・地球と太陽が最も近づく距離

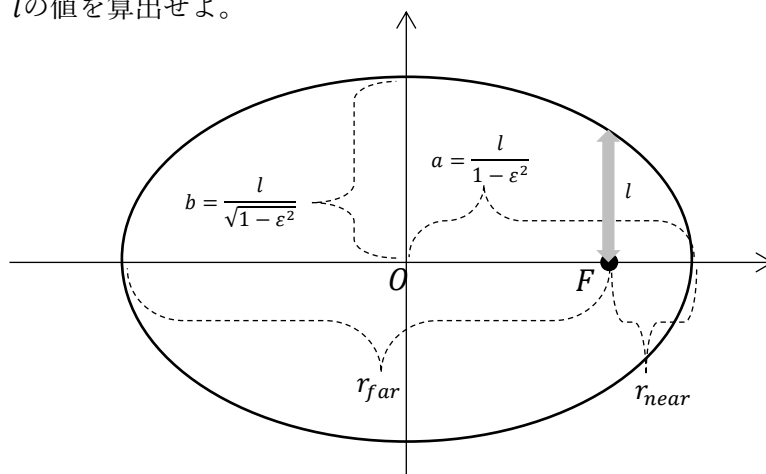
以下、数値計算には電卓を用いてよい。

（１）地球公転軌道の長半径を a 、短半径を b 、離心率を ε 、半直弦を l とするととき

$$\begin{cases} a = \frac{r_{far} + r_{near}}{2} \\ b = \sqrt{r_{far} r_{near}} \\ \varepsilon = \frac{r_{far} - r_{near}}{r_{far} + r_{near}} \\ l = \frac{2r_{far} r_{near}}{r_{far} + r_{near}} \end{cases}$$

であることを示せ。

また、これにより a 、 b 、 ε 、 l の値を算出せよ。



（１）楕円の性質より

$$\begin{cases} r_{near} = a - OF = a - \sqrt{a^2 - b^2} \\ r_{far} = 2a - r_{near} = 2a - \{a - \sqrt{a^2 - b^2}\} = a + \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases} \cdots \star_1$$

よって $\begin{cases} \sqrt{a^2 - b^2} = a - r_{near} \\ \sqrt{a^2 - b^2} = r_{far} - a \end{cases}$ であり、したがって $a - r_{near} = r_{far} - a$ なので、

$$a = \frac{r_{far} + r_{near}}{2}$$

これを $\star_1$ に代入すると $r_{near} = \frac{r_{far} + r_{near}}{2} - \sqrt{\left(\frac{r_{far} + r_{near}}{2}\right)^2 - b^2}$ であるので、これを b について解くと

$$b = \sqrt{r_{far} r_{near}}$$

楕円の性質と★₁より

$$\begin{cases} a = \frac{l}{1-\varepsilon^2} = \frac{r_{far}+r_{near}}{2} \quad \dots \star_2 \\ b = \frac{l}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \sqrt{r_{far}r_{near}} \end{cases}$$

よって $\begin{cases} l = \frac{r_{far}+r_{near}}{2}(1-\varepsilon^2) \\ l = \sqrt{r_{far}r_{near}}\sqrt{1-\varepsilon^2} \end{cases}$ であり、

したがって $\frac{r_{far}+r_{near}}{2}(1-\varepsilon^2) = \sqrt{r_{far}r_{near}}\sqrt{1-\varepsilon^2}$ なので、

$$\frac{r_{far}+r_{near}}{2}\sqrt{1-\varepsilon^2} = \sqrt{r_{far}r_{near}}$$

$$\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{2\sqrt{r_{far}r_{near}}}{r_{far}+r_{near}}$$

$$1-\varepsilon^2 = \frac{4r_{far}r_{near}}{(r_{far}+r_{near})^2}$$

よって $\varepsilon^2 = 1 - \frac{4r_{far}r_{near}}{(r_{far}+r_{near})^2} = \frac{(r_{far}-r_{near})^2}{(r_{far}+r_{near})^2} = \frac{(r_{far}-r_{near})^2}{(r_{far}+r_{near})^2}$

よって $\varepsilon = \frac{r_{far}-r_{near}}{r_{far}+r_{near}}$

これを★₂に代入すると

$$l = \frac{r_{far}+r_{near}}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{r_{far}-r_{near}}{r_{far}+r_{near}} \right)^2 \right\} = \frac{2r_{far}r_{near}}{r_{far}+r_{near}}$$

上記に、 $r_{far} = 1.521 \times 10^{11}m$ 、 $r_{near} = 1.471 \times 10^{11}m$ を代入し、

$$\begin{cases} a = 1.496 \times 10^{11}m \\ b = 1.49579 \times 10^{11}m \\ \varepsilon = 0.0167 \\ l = 1.49558 \times 10^{11}m \end{cases}$$

(2) 地球の公転周期を $T = 31556926\text{s}$ (365 日 5 時間 48 分 46 秒) とする。以下、数値計算において、 π は計算機の示す値を用いてよい。

地球公転軌道の描く楕円の面積を S 、地球の面積速度を $\frac{1}{2}h$ とするとき、

$$\begin{cases} S = \frac{\pi}{2}(r_{\text{far}} + r_{\text{near}})\sqrt{r_{\text{far}}r_{\text{near}}} \\ h = \frac{\pi}{T}(r_{\text{far}} + r_{\text{near}})\sqrt{r_{\text{far}}r_{\text{near}}} \end{cases}$$

であることを示せ。

また、これにより S 、 h の値を算出せよ。

(2) $S = \pi ab$ であるので、(1) より

$$S = \pi \left(\frac{r_{\text{far}} + r_{\text{near}}}{2} \right) (\sqrt{r_{\text{far}}r_{\text{near}}}) = \frac{\pi}{2} (r_{\text{far}} + r_{\text{near}}) \sqrt{r_{\text{far}}r_{\text{near}}}$$

また、 $\frac{1}{2}h = \frac{S}{T}$ であるので、

$$h = 2 \frac{S}{T} = \frac{\pi}{T} (r_{\text{far}} + r_{\text{near}}) \sqrt{r_{\text{far}}r_{\text{near}}}$$

上記に $r_{\text{far}} = 1.521 \times 10^{11}\text{m}$ 、 $r_{\text{near}} = 1.471 \times 10^{11}\text{m}$ 、 $T = 31556926\text{s}$ 、 π は計算機の示す値を代入し、

$$\begin{cases} S = 7.030 \times 10^{22}\text{m}^2 \\ h = 4.455 \times 10^{15}\text{m}^2/\text{s} \end{cases}$$

(3) 万有引力定数を $G = 6.674 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ とする。

太陽の質量を M とするとき、

$$M = \frac{\pi^2 (r_{far} + r_{near})^3}{2GT^2}$$

であることを示せ。

また、これにより M の値を算出せよ。

(3) $l = \frac{h^2}{GM}$ より、 $M = \frac{h^2}{Gl}$ であるので、(1) (2) より

$$M = \frac{\left\{ \frac{\pi}{T} (r_{far} + r_{near}) \sqrt{r_{far} r_{near}} \right\}^2}{G \times \left(\frac{2r_{far} r_{near}}{r_{far} + r_{near}} \right)} = \frac{\pi^2 (r_{far} + r_{near})^3}{2GT^2}$$

上記に $r_{far} = 1.521 \times 10^{11} m$ 、 $r_{near} = 1.471 \times 10^{11} m$ 、 $T = 31556926 s$ 、 $G = 6.674 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ 、 π は計算機の示す値を代入し、

$$M = 1.988 \times 10^{30} kg$$

【解説 20】 1次元波動方程式

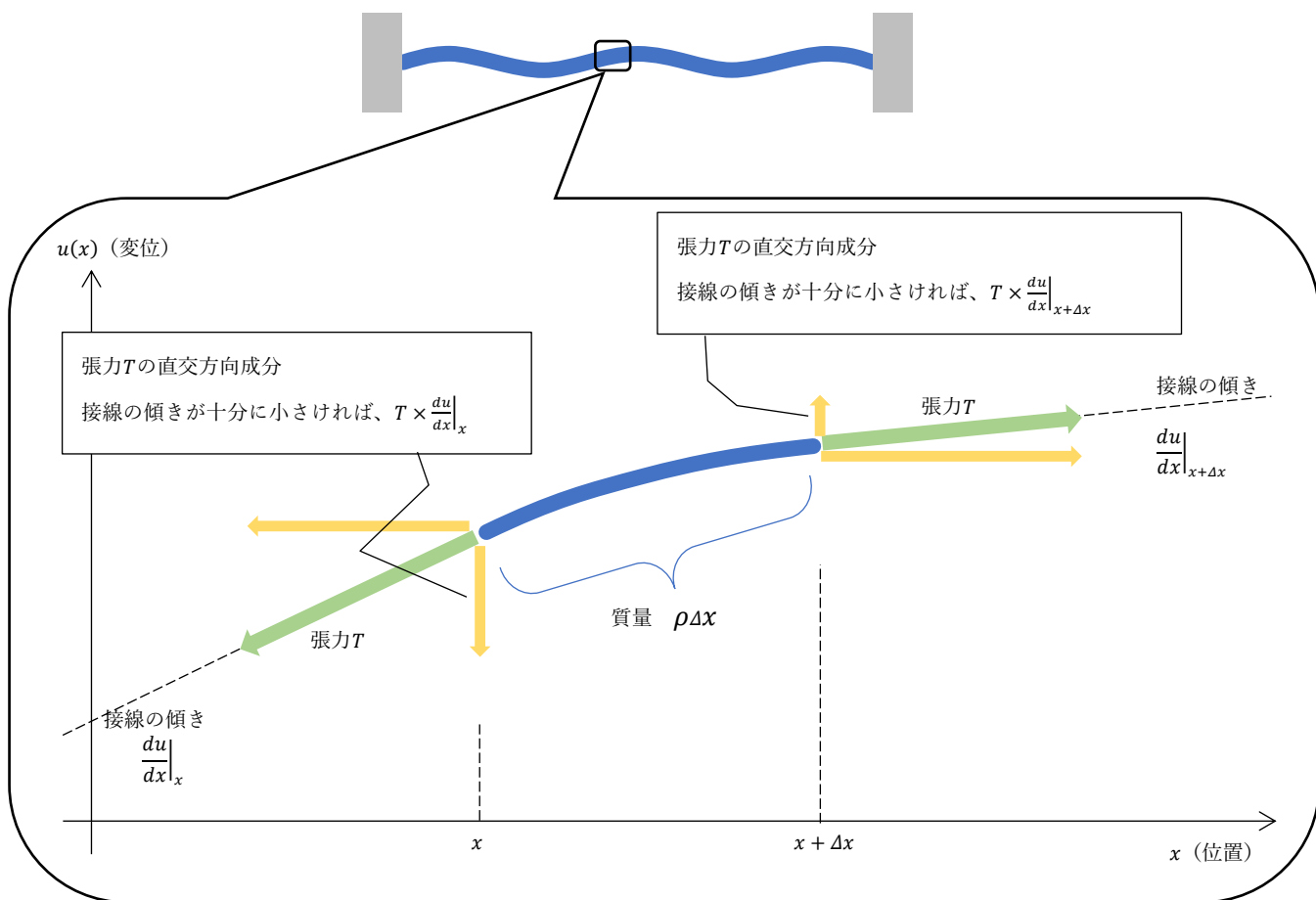
数学定理

1次元波動方程式

強く張られた1本の弦の振動を考える。

ここで $\begin{cases} \rho: \text{弦の線密度 (単位長あたりの質量)} \\ T: \text{弦の張力} \end{cases}$ とする。

弦の振幅は十分に小さいものと仮定する。すなわち、弦の各々の微小区間は、弦と垂直な方向についてのみ運動し、弦と平行な方向については運動しないものとする。



このとき、弦の微小区間に関する運動方程式は、

$$\rho \Delta x \times \frac{d^2 u}{dt^2} = T \times \left. \frac{du}{dx} \right|_{x+\Delta x} - T \times \left. \frac{du}{dx} \right|_x$$

したがって

$$\rho \times \frac{d^2 u}{dt^2} = T \times \frac{\left. \frac{du}{dx} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{du}{dx} \right|_x}{\Delta x}$$

Δx を十分に小さくすれば

$$\rho \times \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \times \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$\frac{T}{\rho}$ を c とおくと

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leq c)$$

であり、これを（１次元の）波動方程式と呼ぶ。

波動方程式は、弦の振動の場合に限らず波動現象の全般に成り立つ普遍的な方程式である。

数学定理

１次元進行波

波高が、位置の１次元関数に関する任意の関数 $u = f(\alpha x + \beta t)$ で表わされるとき、 u は波動である。

（注） $u = f\left(\alpha\left(x + \frac{\beta}{\alpha}t\right)\right)$ であり、 f は任意の関数であるのだから、 $f(\alpha x)$ をあたためて $f(x)$ と書き換えて、 $u = f(x + kt)$ と書いてもよい。

数学定理

重ね合わせの原理

u_1 、 u_2 が同じ波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の解であるとき、 $u_3 = k_1 u_1 + k_2 u_2$ (k_1 、 k_2 は定数) もその波動方程式の解である。

数学定理

1次元進行波の進行速度

1次元進行波が $u = f(x - vt)$ で表わされるとき、 v をその1次元進行波の「進行速度」と呼ぶ。

波動方程式が

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

で表わされるとき、

$$v = \pm \sqrt{c}$$

である。

すなわち1次元進行波は、正の方向にむかって速さ v で進行するか、負の方向に向かって速さ v で進行するかのいずれかであり、それ以外の速さの進行波は発生しない。

この観点から、波動方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

と表記されることも多い。

数学定理

1次元進行波のダランベールの解

1次元波動方程式の解は、正の方向へ進行する何らかの進行波と、負の方向へ進行する何らかの進行波の和

$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (f, g \text{ は所与の関数、} v \text{ は定数})$$

である。

数学定理

ダランベールの解の初期値問題

1次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

において、初期条件

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) \\ \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \Psi(x) \end{cases}$$

が与えられたときの、ダランベールの解は、

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \{ \varphi(x - vt) + \varphi(x + vt) \} + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \Psi(p) \, dp$$

である。

【問題 61】 1 次元波動方程式の解（例：1 次元進行波）

次の関数が 1 次元波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の解であることを示せ。

- (1) $u = A \sin(\alpha x + \beta t)$ (A, α, β は定数)
- (2) $u = e^{\alpha x + \beta t}$ (α, β は定数)
- (3) $u = A \log(\alpha x + \beta t)$ (A, α, β は定数、 $\alpha x + \beta t > 0$)
- (4) $u = k(\alpha x + \beta t)^2 + l(\alpha x + \beta t) + m$ (k, l, m, α, β は定数)
- (5) $u = f(\alpha x + \beta t)$ (f は関数、 α, β は定数)

$$(1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = A\beta \cos(\alpha x + \beta t) \\ \frac{\partial u}{\partial x} = A\alpha \cos(\alpha x + \beta t) \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -A\beta^2 \sin(\alpha x + \beta t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -A\alpha^2 \sin(\alpha x + \beta t) \end{cases}$$

したがって $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ であり、 $\frac{\beta^2}{\alpha^2} = c$ とおくと $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$(2) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \beta e^{\alpha x + \beta t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha e^{\alpha x + \beta t} \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta^2 e^{\alpha x + \beta t} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 e^{\alpha x + \beta t} \end{cases}$$

したがって $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ であり、 $\frac{\beta^2}{\alpha^2} = c$ とおくと $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$(3) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{A\beta}{\alpha x + \beta t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{A\alpha}{\alpha x + \beta t} \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{A\beta^2}{(\alpha x + \beta t)^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{A\alpha^2}{(\alpha x + \beta t)^2} \end{cases}$$

したがって $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ であり、 $\frac{\beta^2}{\alpha^2} = c$ とおくと $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$(4) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 2k\beta(\alpha x + \beta t) + l\beta \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 2k\alpha(\alpha x + \beta t) + l\alpha \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2k\beta^2(\alpha x + \beta t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2k\alpha^2(\alpha x + \beta t) \end{cases}$$

したがって $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ であり、 $\frac{\beta^2}{\alpha^2} = c$ とおくと $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

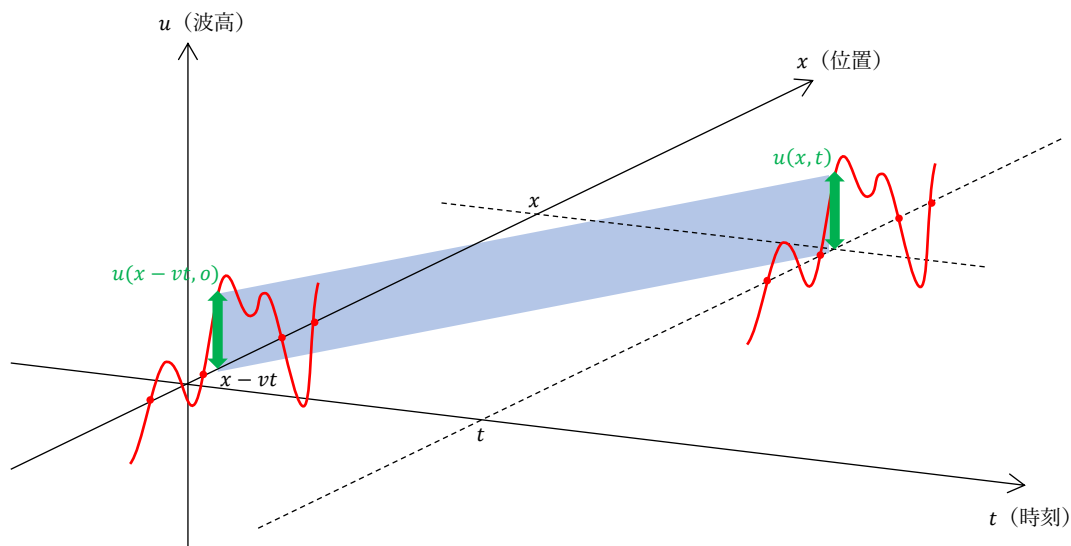
(6) $\alpha x + \beta t = \xi$ とおくと

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) = \beta \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) = \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) = \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) \end{cases}$$

したがって $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ であり、 $\frac{\beta^2}{\alpha^2} = c$ とおくと $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(6) 時刻 t 、位置 x における波高を $u(x, t)$ とする波がある。

このとき、任意の時刻 t と任意の位置 x について、時刻 t のときの位置 x における波高 $u(x, t)$ は、時刻 0 のときの位置 $x - vt$ における波高 $u(0, x - vt)$ と等しいものとする。 $(v$ は定数)



このとき、 $u(x, t)$ は波動方程式の解であることを示せ。

(6) 題意より $u(x, t) = u(x - vt, 0)$ であり、 $u(x, 0) = f(x)$ とおくと、 $u(x, t) = f(x - vt)$ と書ける。

$x - vt = \xi$ とおくと

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) = -v \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -v \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) = v^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) \end{cases}$$

したがって $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ であり、 $v^2 = c$ とおくと $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(注1) いかなる波形であろうとも、進行波であれば波動方程式の解となる。

(注2) 波動方程式の比例定数 c は、波の進行速度の平方である。このことから波動方程式は、 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ と表記されることも多い。

【問題 62】重ね合わせの原理

u_1 、 u_2 が同じ波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の解であるとき、 $u_3 = k_1 u_1 + k_2 u_2$ (k_1 、 k_2 は定数)

もその波動方程式の解であることを示せ。

$$\begin{cases} \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(k_1 u_1 + k_2 u_2) = \frac{\partial}{\partial t}(k_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial t}(k_2 u_2) = k_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + k_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(k_1 u_1 + k_2 u_2) = \frac{\partial}{\partial x}(k_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial x}(k_2 u_2) = k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \end{cases} \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(k_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + k_2 \frac{\partial u_2}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(k_1 \frac{\partial u_1}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(k_2 \frac{\partial u_2}{\partial t}\right) = k_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + k_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\right) = k_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \end{cases}$$

また、 u_1 、 u_2 は同じ波動方程式の解なので、 $\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$ 、 $\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$ (c_1 、 c_2 は定数) と書ける。

したがって

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = k_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + k_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = k_1 \left(c \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right) + k_2 \left(c \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) = c \left(k_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)$$

であり、よって $\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}$ が成り立つ。

すなわち、 u_3 もその波動方程式の解である。

(注) このことを繰り返し用いると、

u_1 、 u_2 、 $\dots$ 、 u_n が同じ波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の解であるとき、 $U = k_1 u_1 + k_2 u_2 + \dots + k_n u_n$ (k_1 、 k_2 、 $\dots$ 、 k_n は定数) もその波動方程式の解であることが分かる。(波動方程式の線形性)

【問題 63】 1 次元進行波の進行速度

1 次元進行波 $u(x, t) = f(x - ct)$ (f は所与の関数、 c は定数) が、波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} =$

$v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (c は正の定数) の解であるとき、 c の取りうる値をすべて求めよ。

ただし、 $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x)$ は恒等的に 0 ではないものとする。

(1) $x - ct = \xi$ とおくと

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) = -c \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -v \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) \end{cases}$$

これを波動方程式に代入し、 $c^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) = v^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi)$ よって $(c^2 - v^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) = 0$

仮定より $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) \neq 0$ 、したがって $c^2 = v^2$ であるので、 $c = \pm v$

(注) すなわち進行波は、正の方向にむかって速さ v で進行するか、負の方向に向かって速さ v で進行するかのいずれかであり、それ以外の速さの進行波は発生しない。

【問題 64】 1 次元波動方程式のダランベールの解

(1) $u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$ (f, g は所与の関数、 v は定数) は波動方程式の解であることを示せ。

ただし、 $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x)$ 、 $\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x)$ はいずれも恒等的に 0 ではないものとする。

1 次元進行波 $f(x - vt)$ 、 $g(x + vt)$ はいずれも波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の解である。

したがって重ね合わせの原理より $u(t, x) = f(x - vt) + g(x + vt)$ は、波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の解である。

(注 1) この $u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$ を波動方程式の「ダランベールの解」という。

(注 2) 進行波の場合に限らず、波動方程式の任意の解は必ずダランベールの解の形で表すことができる。(すなわちダランベールの解は波動方程式の一般解である。)。このことの証明は偏微分方程式の知識を要するため、ここでは省略する。

1 次元波動方程式の解は、①正の方向にむかって進行するなんらかの進行波、②同じ速さで負の方向にむかって進行するなんらかの進行波、③その 2 つの進行波の重ね合わせ、のいずれかである。

【問題 65】 ダランベールの解の初期値問題

$\varphi(x)$ 、 $\Phi(x)$ を任意の関数とし、

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \{ \varphi(x - vt) + \varphi(x + vt) \} + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \Psi(p) dp$$

とおく。

このとき、

(1) $u(t, x)$ が波動方程式の解であることを示し、その波動方程式を求めよ。

k を定数として、

$$u(x, t) = \left\{ \frac{1}{2} \varphi(x - vt) + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^k \Psi(p) dp \right\} + \left\{ \frac{1}{2} \varphi(x + vt) + \frac{1}{2v} \int_k^{x+vt} \Psi(p) dp \right\}$$

であるから、

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2v} \int_x^k \Psi(p) dp \\ g(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2v} \int_k^x \Psi(p) dp \end{cases}$$

とおくと

$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

と書ける。

よって $u(x, t)$ は、波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

のダランベールの解である。

(2) $u(0, x)$ を求めよ。

与式に $t = 0$ を代入し、

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \frac{1}{2} \{ \varphi(x - 0t) + \varphi(x + 0t) \} + \frac{1}{2v} \int_{x-0t}^{x+0t} \Psi(p) dp \\ &= \frac{1}{2} \{ \varphi(x) + \varphi(x) \} + \frac{1}{2v} \int_x^x \Psi(p) dp \\ &= \varphi(x) \end{aligned}$$

(注) つまり、 $\varphi(x)$ は時刻 0 における波形である。

(3) $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ を求めよ。また、 $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0}$ を求めよ。

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \{ \varphi(x-vt) + \varphi(x+vt) \} + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \Psi(p) dp \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x-vt) + \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x+vt) \right\} + \frac{1}{2v} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x-vt}^{x+vt} \Psi(p) dp \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x-vt) + \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x+vt) \right\} + \frac{1}{2v} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_{x-vt}^k \Psi(p) dp + \frac{\partial}{\partial t} \int_k^{x+vt} \Psi(p) dp \right\}\end{aligned}$$

ここで $\begin{cases} \xi^- = x - vt \\ \xi^+ = x + vt \end{cases}$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{d\xi^-}{dt} \times \frac{d}{d\xi^-} \varphi(\xi^-) + \frac{d\xi^+}{dt} \times \frac{d}{d\xi^+} \varphi(\xi^+) \right\} + \frac{1}{2v} \left\{ \frac{d\xi^-}{dt} \times \frac{d}{d\xi^-} \int_{\xi^-}^k \Psi(p) dp + \frac{d\xi^+}{dt} \times \frac{d}{d\xi^+} \int_k^{\xi^+} \Psi(p) dp \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -v \times \frac{d}{d\xi^-} \varphi(\xi^-) + v \times \frac{d}{d\xi^+} \varphi(\xi^+) \right\} + \frac{1}{2v} \left\{ -v \times (-\Psi(\xi^-)) + v \times (\Psi(\xi^+)) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -v \times \frac{d}{d\xi^-} \varphi(\xi^-) + v \times \frac{d}{d\xi^+} \varphi(\xi^+) \right\} + \frac{1}{2} \{ \Psi(\xi^-) + \Psi(\xi^+) \}\end{aligned}$$

また、 $t=0$ のとき $\xi^- = \xi^+ = x$ であるので、

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \frac{1}{2} \left\{ -v \times \frac{d}{dx} \varphi(x) + v \times \frac{d}{dx} \varphi(x) \right\} + \frac{1}{2} \{ \Psi(x) + \Psi(x) \} \\ &= \Psi(x)\end{aligned}$$

(注1) つまり、 $\Psi(x)$ は、時刻 0 における波動関数の時間偏導関数である。

(注2) 以上のことから、

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \{ \varphi(x-vt) + \varphi(x+vt) \} + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \Psi(p) dp$$

は、波動方程式

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

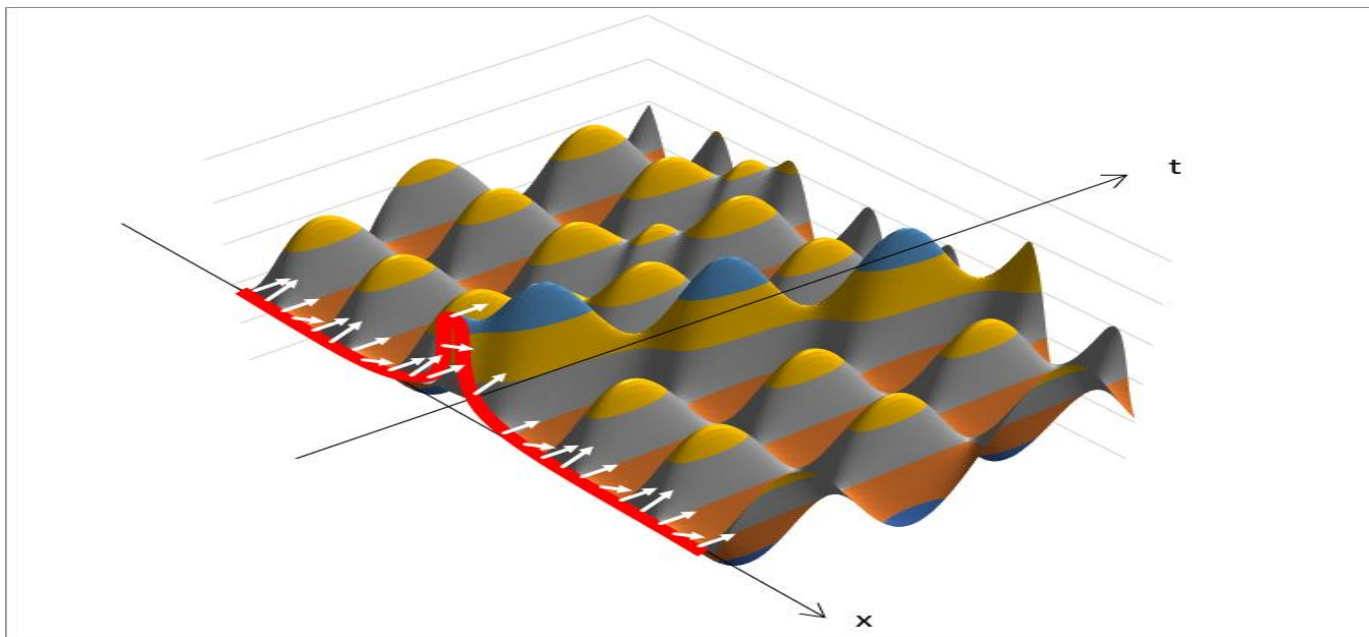
に、初期条件

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \Psi(x) \end{cases}$$

が与えられたときの、ダランベールの解である。

【問題 66】 1 次元波動方程式のダランベールの解（例）

初期条件を $\begin{cases} u(x, 0) = \frac{\alpha}{x^2+1} \\ \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \beta \sin x \end{cases}$ とするとき、波動方程式 $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$ のダランベールの解を求めよ。



ダランベールの解 $u(x, t) = \frac{1}{2} \{ \varphi(x - vt) + \varphi(x + vt) \} + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \psi(p) dp$ に、 $\begin{cases} \varphi(x) = \frac{\alpha}{x^2+1} \\ \psi(x) = \beta \sin x \end{cases}$ を代入し、

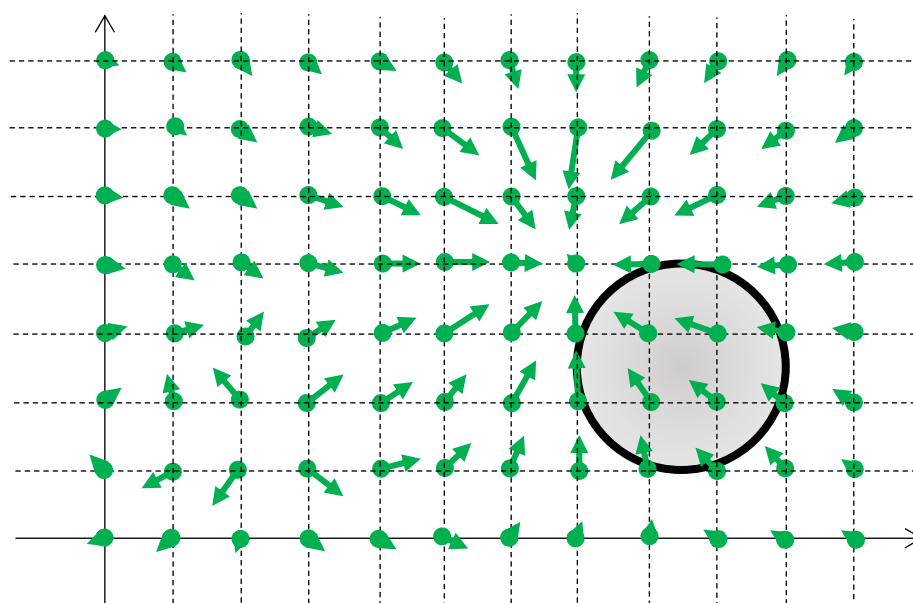
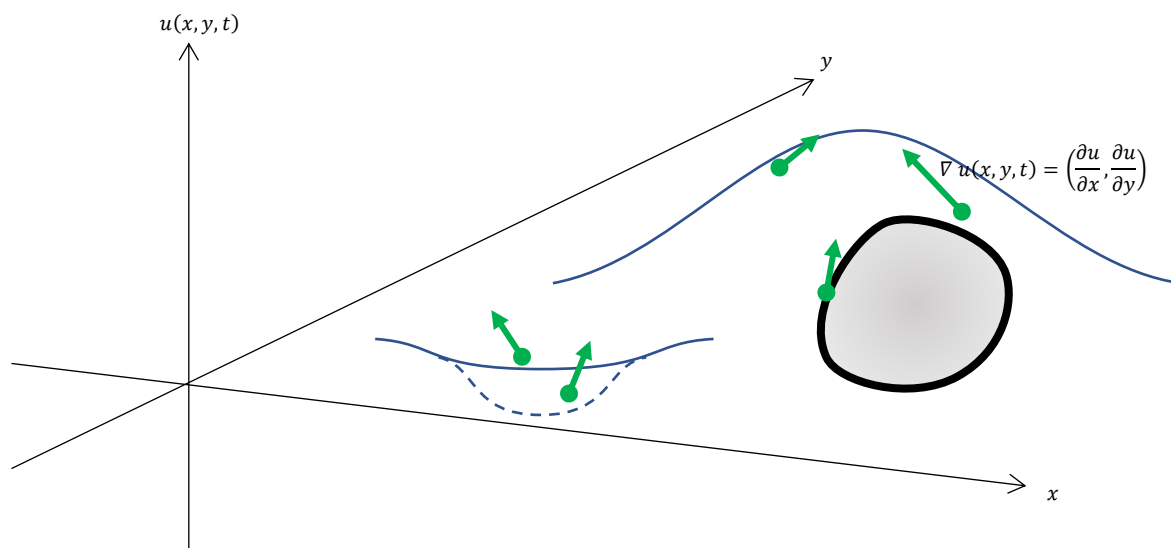
$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\alpha}{(x-vt)^2+1} + \frac{\alpha}{(x+vt)^2+1} \right\} + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \beta \sin p \, dp \\ &= \frac{\alpha}{2} \times \frac{(x^2-2xvt+v^2t^2+1)+(x^2+2xvt+v^2t^2+1)}{(x^2-2xvt+v^2t^2+1)(x^2+2xvt+v^2t^2+1)} - \frac{\beta}{2v} [\cos p]_{x-vt}^{x+vt} \\ &= \alpha \times \frac{x^2+v^2t^2+1}{(x^2+v^2t^2+1)^2-4x^2v^2t^2} - \frac{\beta}{2v} \{ \cos(x+vt) - \cos(x-vt) \} \\ &= \alpha \times \frac{x^2+v^2t^2+1}{(x^2+v^2t^2+1)^2-4x^2v^2t^2} - \frac{\beta}{2v} \left\{ -2 \sin \frac{(x+vt)+(x-vt)}{2} \sin \frac{(x+vt)-(x-vt)}{2} \right\} \\ &= \alpha \times \frac{x^2+v^2t^2+1}{(x^2+v^2t^2+1)^2-4x^2v^2t^2} + \beta \times \frac{\sin x \sin vt}{v} \end{aligned}$$

【解説 21】 多次元波動方程式

数学定理

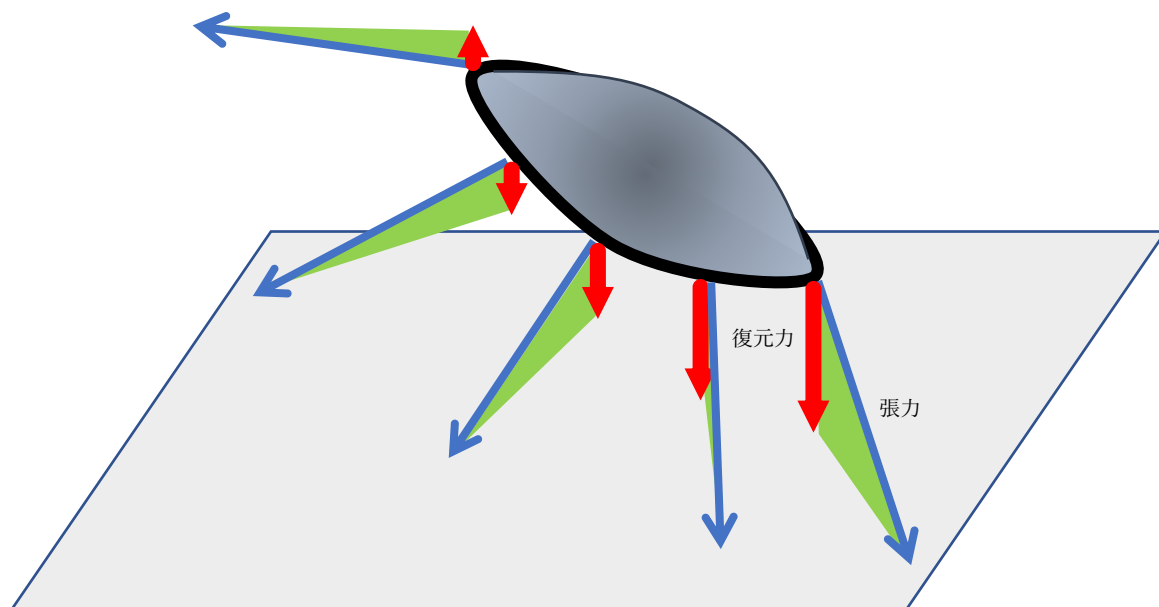
2次元平面上で、一定の張力で張られた膜（例えば、太鼓の皮のようなもの）を考える。
位置 (x, y) の時刻 t における膜の波高（中立点からの変位）を $u(x, y, t)$ とする。

このとき、勾配ベクトルは $\nabla u(x, y, t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ であった。



膜上のある位置の近傍領域では、様々な方向からの張力により復元力（垂直方向に、中立点へ戻ろうとする力）が作用する。

復元力の大きさは、それぞれの位置における勾配の大きさに比例する。



単位面積当たりの復元力（近傍領域全体に作用する復元力を、その近傍領域の面積で除した値の、無限小領域に関する極限值）は、次の式で与えられる。

$$\nabla \cdot \nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

作用素 $\nabla \cdot \nabla$ (∇^2 と書くこともある。) を Δ と書き、「ラプラシアン（ラプラス作用素）」と呼ぶ。

上式は、 Δ を用いると、 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ と書ける。

復元力が Δu に比例し、復元力は膜の加速度 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ に比例するのであるから（ニュートンの運動方程式）、 Δu は $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ に比例し、1次元の場合と同じ理由から比例定数は波動の進行速度を v として v^2 となる。

3次元の場合も同様であり、多次元の波動方程式は次の通りとなる。

$$\begin{cases} 2 \text{次元の場合} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ 3 \text{次元の場合} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \end{cases}$$

数学定理

平面波（波形を保ったままで、ある方向に（平面では直線状に、空間では平面状に）進行する波。1次元の場合は進行波と称していた。）波動方程式の解である。

数学定理

3次元球面波（ある位置から放射状に（球状に）拡散する波）は、波動方程式の解である。

数学定理

2次元球面波（ある位置から放射状に（円状に）拡散する波）は、波動方程式の解である。ただし、波高が波源からの距離に比べて十分に小さいことを条件とする。

数学定理

多次元波動方程式の解の和（重ね合わせ）もまた、その多次元波動方程式の解である。

【問題 67】 多次元波動方程式の解（例 1：平面波）

(1) 波高が $u(x, y, t) = f(\alpha x + \beta y + \gamma t)$ (f は関数、 α, β, γ は定数) で表わされるとき、 u は 2 次元波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ の解であることを示せ。
またそのとき、 v を α, β, γ の関数として表せ。

(1) $\alpha x + \beta y + \gamma t = \xi$ とおくと

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) = \gamma \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) = \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) = \beta \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) = \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \beta \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) = \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) \end{cases}$$

したがって $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (\alpha^2 + \beta^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) \end{cases}$ であるから $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\gamma^2}{\alpha^2 + \beta^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ であり、
 $\frac{\gamma^2}{\alpha^2 + \beta^2} = v^2$ とおくと $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ となる。

またこのとき、 $v = \pm \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ である。

(注) $\gamma = \pm v \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ を、代入すると

$$u(t, x, y) = f(\alpha x + \beta y \pm v \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} t) = f\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} x + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} y \pm vt \right)\right)$$

であり、これを $f(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \times \xi) = g(\xi)$ として書き換えると、

$$u(t, x, y) = g\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} x + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} y \pm vt\right)$$

となる。

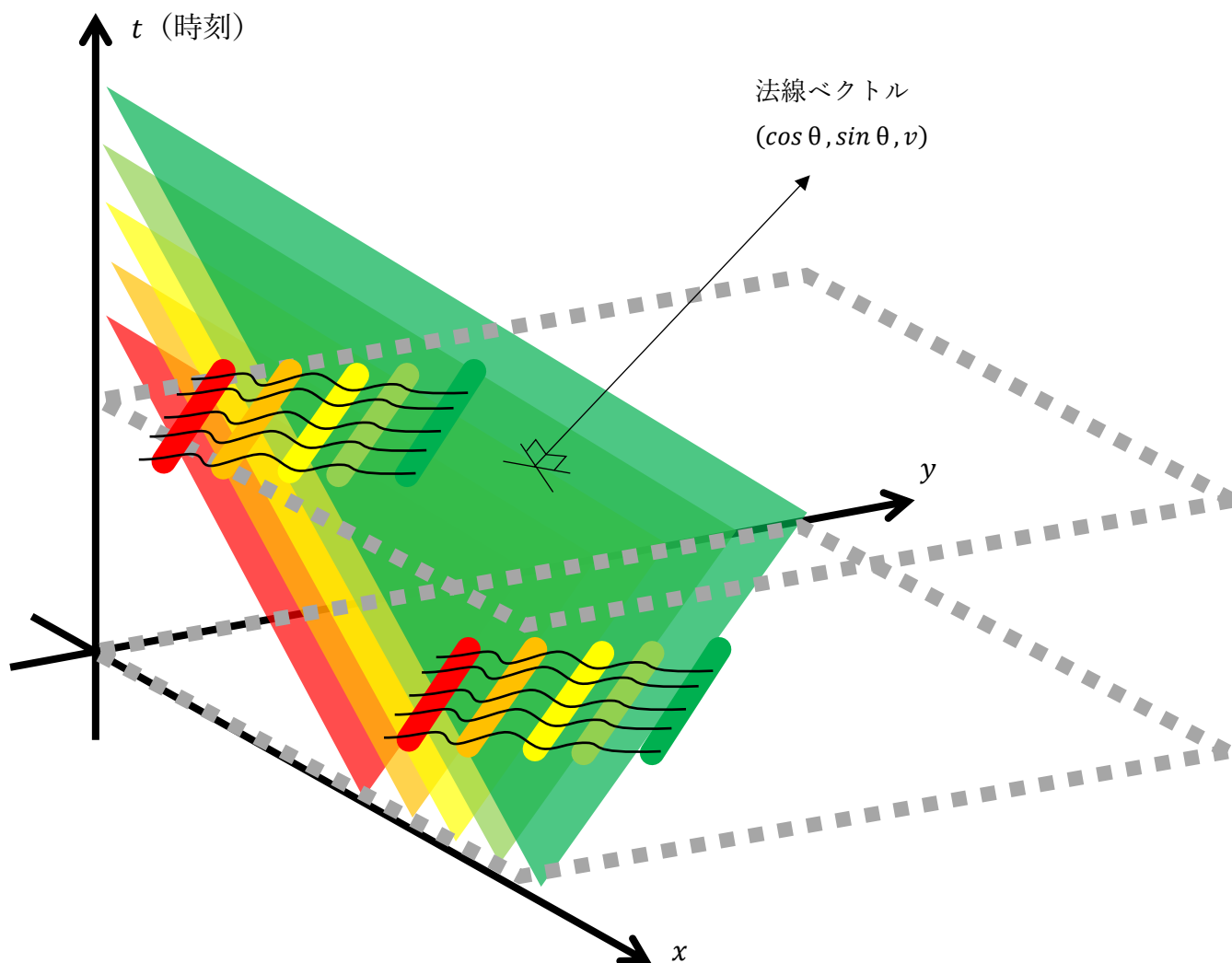
これは、

$$u(x, y, t) = g(x \cos \theta + y \sin \theta \pm vt)$$

と書くこともできる。

(2) 時刻 t 、位置 (x, y) における波高を $u(x, y, t)$ とする波がある。

このとき、任意の時刻 t と任意の実数 k について、時刻 t のときの直線 $x \cos \theta + y \sin \theta + vt = k$ (θ, v は定数) 上の位置 (x, y) における波高 $u(t, x, y)$ は定数であり、かつその定数は時刻 0 のときの直線 $x \cos \theta + y \sin \theta = k$ 上の位置 (x, y) における波高 $u(x, y, 0)$ と等しいものとする。



このとき、 $u(x, y, t)$ は波動方程式の解であることを示せ。

(2) 題意より、平面 $x \cos \theta + y \sin \theta + vt = k$ 上のすべての点において波高 $u(x, y, t)$ が一致している。

すなわち波高 $u(x, y, t)$ は $x \cos \theta + y \sin \theta + vt$ の関数であるので、 $u(x, y, t) = f(x \cos \theta + y \sin \theta + vt)$ とおくことができる。

このとき、(1) より $u(x, y, t)$ は波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{v^2}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

の解である。

(3) 波高が $u(x, y, z, t) = f(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t)$ (f は関数、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は定数) で表わさ

れるとき、 u は3次元波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$ の解であることを示せ。

またそのとき、 v を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の関数として表せ。

(1) $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = \xi$ とおくと

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) = \delta \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) = \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) = \beta \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) = \gamma \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) \end{cases} \quad \text{よ} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \delta \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) = \delta^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \beta \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) = \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \gamma \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) = \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) \end{cases}$$

したがって $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \delta^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi) \end{cases}$ であるから $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\delta^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$ であり、
 $\frac{\delta^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = v^2$ とおくと $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$ となる。

またこのとき、 $v = \pm \frac{\delta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$ である。

(注) $\delta = \pm v \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ を、代入すると

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= f(\alpha x + \beta y + \gamma z \pm v \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} t) \\ &= f\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} x + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} y + \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} z \pm vt \right)\right) \end{aligned}$$

であり、これを $f(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \times \xi) = g(\xi)$ として書き換えると、

$$u(x, y, z, t) = g\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} x + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} y + \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} z \pm vt\right)$$

となる。

【問題 68】 多次元波動方程式の解（例 2：3次元球面波）

時刻 t 、位置 (x, y, z) における波高 u が

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \times u = f(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \pm vt)$$

(f は所与の関数、 a, b, c, v は定数)

で表わされるとき、 u が3次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

の解であることを、次の手順により示せ。

$$(1) \quad \begin{cases} r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \\ \xi = r \pm vt \end{cases} \quad \text{とおくとき、}$$

$$\frac{\partial r}{\partial t}, \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}, \frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

を求めよ。

(1) それぞれ微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial t} &= 0 \\ \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2(x-a)}{2\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} = \frac{x-a}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{2(y-b)}{2\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} = \frac{y-b}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{2(z-c)}{2\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} = \frac{z-c}{r} \end{cases} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \pm v \\ \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{r} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-b}{r} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z-c}{r} \end{cases} \end{aligned}$$

(2) 与式は $ru = f(\xi)$ と表される。

このことから、① $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 、② $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 、 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 、 $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ を求めよ。

(2) ①

与式を t で偏微分し、

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial t} u + r \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial f(\xi)}{\partial t} \\ \frac{\partial r}{\partial t} u + r \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} \\ 0 \times u + r \frac{\partial u}{\partial t} &= \pm v \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} \\ r \frac{\partial u}{\partial t} &= \pm v \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}\end{aligned}$$

これをさらに t で偏微分し、

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \pm v \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} \\ 0 \times \frac{\partial u}{\partial t} + r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \pm v \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} \\ r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\pm v)(\pm v) \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{v^2}{r} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}\end{aligned}$$

(2) ②

与式を x で偏微分し、

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} u + r \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial f(\xi)}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial x} u + r \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} \\ \frac{x-a}{r} \frac{f(\xi)}{r} + r \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{x-a}{r} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{x-a}{r^3} \left\{ r \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} - f(\xi) \right\}\end{aligned}$$

これをさらに x で偏微分し、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{r^3 - (x-a)(3r^2) \frac{\partial r}{\partial x}}{r^6} \left\{ r \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} - f(\xi) \right\} + \frac{x-a}{r^3} \left\{ \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} + r \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} - \frac{\partial f(\xi)}{\partial x} \right\} \\ &= \frac{r^3 - (x-a)(3r^2) \frac{x-a}{r}}{r^6} \left\{ r \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} - f(\xi) \right\} + \frac{x-a}{r^3} \left\{ \frac{x-a}{r} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} + r \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} \right\} \\ &= \frac{r^3 - (x-a)(3r^2) \frac{x-a}{r}}{r^6} \left\{ r \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} - f(\xi) \right\} + \frac{x-a}{r^3} \left\{ \frac{x-a}{r} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} + r \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} \right\} \\ &= \frac{r^2 - 3(x-a)^2}{r^5} \left\{ r \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} - f(\xi) \right\} + \frac{x-a}{r^3} \left\{ \frac{x-a}{r} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} + r \frac{x-a}{r} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} - \frac{x-a}{r} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} \right\} \\ &= \frac{r^2 - 3(x-a)^2}{r^5} \left\{ r \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} - f(\xi) \right\} + \frac{(x-a)^2}{r^3} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}\end{aligned}$$

y, z についても同様であるので、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{r^2 - 3(y-b)^2}{r^5} \left\{ r \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} - f(\xi) \right\} + \frac{(y-b)^2}{r^3} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{r^2 - 3(z-c)^2}{r^5} \left\{ r \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} - f(\xi) \right\} + \frac{(z-c)^2}{r^3} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}\end{aligned}$$

(3) u が3次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

の解であることを示せ。

(3)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{r^2 - 3(x-a)^2}{r^5} \left\{ r \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} - f(\xi) \right\} + \frac{(x-a)^2}{r^3} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{r^2 - 3(y-b)^2}{r^5} \left\{ r \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} - f(\xi) \right\} + \frac{(y-b)^2}{r^3} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{r^2 - 3(z-c)^2}{r^5} \left\{ r \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} - f(\xi) \right\} + \frac{(z-c)^2}{r^3} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} \end{cases}$$

であるので、これらを合計し、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{3r^2 - 3[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]}{r^5} \left\{ r \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} - f(\xi) \right\} + \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}{r^3} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} \\ &= \frac{3r^2 - 3r^2}{r^5} \left\{ r \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} - f(\xi) \right\} + \frac{r^2}{r^3} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} \end{aligned}$$

これと、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{v^2}{r} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}$$

より、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

が成り立つ。

【問題 69】 多次元波動方程式の解（例 3：2 次元球面波）

時刻 t 、位置 (x, y) における波高 u が

$$\{(x-a)^2 + (y-b)^2\}^{\frac{1}{4}} \times u = f(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \pm vt)$$

(f は所与の関数、 a, b, v は定数)

で表わされるとする。

ただし、波高 u は波源からの距離に比べて十分に小さく、 $\frac{u}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \doteq 0$ とする。

このとき、 u が 2 次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

の解であることを、次の手順により示せ。

$$(1) \quad \begin{cases} r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \\ \xi = r \pm vt \end{cases} \quad \text{とおくとき、}$$

$$\frac{\partial r}{\partial t}, \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

を求めよ。

(1) それぞれ微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial t} &= 0 \\ \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2(x-a)}{2\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = \frac{x-a}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{2(y-b)}{2\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = \frac{y-b}{r} \end{cases} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \pm v \\ \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{r} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-b}{r} \end{cases} \end{aligned}$$

(2) 与式は $r^{\frac{1}{2}}u = f(\xi)$ と表される。

このことから、① $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 、② $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 、 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を求めよ。

(2) ①

与式を t で偏微分し、

$$\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial r}{\partial t}u + r^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f(\xi)}{\partial t}$$

$$\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial r}{\partial t}u + r^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}$$

$$\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}} \times 0 \times u + r^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial t} = \pm v \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}$$

$$r^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial t} = \pm v \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}$$

これをさらに t で偏微分し、

$$\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} + r^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \pm v \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}$$

$$\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}} \times 0 \times \frac{\partial u}{\partial t} + r^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \pm v \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}$$

$$r^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\pm v)(\pm v) \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}$$

(2) ②

与式を x で偏微分し、

$$\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial r}{\partial x}u + r^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f(\xi)}{\partial x}$$

$$\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial r}{\partial x}u + r^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}$$

$$\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\frac{x-a}{r}r^{-\frac{1}{2}}f(\xi) + r^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x-a}{r} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}$$

$$\frac{1}{2}r^{-2}(x-a)f(\xi) + r^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x} = r^{-1}(x-a) \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}r^{-\frac{5}{2}}(x-a)f(\xi) + r^{-\frac{3}{2}}(x-a) \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}$$

これをさらに x で偏微分し、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{5}{2} \right) r^{-\frac{7}{2}} \frac{\partial r}{\partial x} (x-a) f(\xi) - \frac{1}{2} r^{-\frac{5}{2}} f(\xi) - \frac{1}{2} r^{-\frac{5}{2}} (x-a) \frac{\partial f(\xi)}{\partial x} \\
 &\quad + \left(-\frac{3}{2} \right) r^{-\frac{5}{2}} \frac{\partial r}{\partial x} (x-a) \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} + r^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} + r^{-\frac{3}{2}} (x-a) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} \\
 &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{5}{2} \right) r^{-\frac{7}{2}} \frac{\partial r}{\partial x} (x-a) f(\xi) - \frac{1}{2} r^{-\frac{5}{2}} f(\xi) - \frac{1}{2} r^{-\frac{5}{2}} (x-a) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} \\
 &\quad + \left(-\frac{3}{2} \right) r^{-\frac{5}{2}} \frac{\partial r}{\partial x} (x-a) \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} + r^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} + r^{-\frac{3}{2}} (x-a) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} \\
 &= \frac{5}{4} r^{-\frac{7}{2}} \frac{x-a}{r} (x-a) f(\xi) - \frac{1}{2} r^{-\frac{5}{2}} f(\xi) - \frac{1}{2} r^{-\frac{5}{2}} (x-a) \frac{x-a}{r} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} \\
 &\quad - \frac{3}{2} r^{-\frac{5}{2}} \frac{x-a}{r} (x-a) \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} + r^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} + r^{-\frac{3}{2}} (x-a) \frac{x-a}{r} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} \\
 &= \frac{5}{4} r^{-\frac{9}{2}} (x-a)^2 f(\xi) - \frac{1}{2} r^{-\frac{5}{2}} f(\xi) - \frac{1}{2} r^{-\frac{7}{2}} (x-a)^2 \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} \\
 &\quad - \frac{3}{2} r^{-\frac{7}{2}} (x-a)^2 \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} + r^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} + r^{-\frac{5}{2}} (x-a)^2 \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} \\
 &= \frac{5}{4} r^{-\frac{9}{2}} (x-a)^2 f(\xi) - \frac{1}{2} r^{-\frac{5}{2}} f(\xi) - 2r^{-\frac{7}{2}} (x-a)^2 \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} + r^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} + r^{-\frac{5}{2}} (x-a)^2 \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}
 \end{aligned}$$

y についても同様であるので、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{5}{4} r^{-\frac{9}{2}} (y-b)^2 f(\xi) - \frac{1}{2} r^{-\frac{5}{2}} f(\xi) - 2r^{-\frac{7}{2}} (y-b)^2 \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} + r^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} + r^{-\frac{5}{2}} (y-b)^2 \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}$$

(3) u が2次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

の解であることを示せ。

(3)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{5}{4} r^{-\frac{9}{2}} (x-a)^2 f(\xi) - \frac{1}{2} r^{-\frac{5}{2}} f(\xi) - 2r^{-\frac{7}{2}} (x-a)^2 \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} + r^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} + r^{-\frac{5}{2}} (x-a)^2 \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{5}{4} r^{-\frac{9}{2}} (y-b)^2 f(\xi) - \frac{1}{2} r^{-\frac{5}{2}} f(\xi) - 2r^{-\frac{7}{2}} (y-b)^2 \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} + r^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} + r^{-\frac{5}{2}} (y-b)^2 \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} \end{cases}$$

であるので、これらを合計し、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{5}{4} r^{-\frac{9}{2}} \{(x-a)^2 + (y-b)^2\} f(\xi) - r^{-\frac{5}{2}} f(\xi) - 2r^{-\frac{7}{2}} \{(x-a)^2 + (y-b)^2\} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} \\ &\quad + 2r^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} + r^{-\frac{5}{2}} \{(x-a)^2 + (y-b)^2\} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} \\ &= \frac{5}{4} r^{-\frac{9}{2}} r^2 f(\xi) - r^{-\frac{5}{2}} f(\xi) - 2r^{-\frac{7}{2}} r^2 \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} + 2r^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} + r^{-\frac{5}{2}} r^2 \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} \\ &= \frac{5}{4} r^{-\frac{5}{2}} f(\xi) - r^{-\frac{5}{2}} f(\xi) - 2r^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} + 2r^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} + r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} \\ &= \frac{1}{4} r^{-\frac{5}{2}} f(\xi) + r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} \end{aligned}$$

$r^{\frac{1}{2}} u = f(\xi)$ であるので、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{1}{4} r^{-\frac{5}{2}} r^{\frac{1}{2}} u + r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} \\ &= \frac{1}{4} r^{-2} u + r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} \end{aligned}$$

仮定より $\frac{u}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \doteq 0$ であるので、 $r^{-2} u = 0$ とみなすと、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}$$

これと、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}$$

より、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

が成り立つ。

【解説 22】 定常波

数学的定義

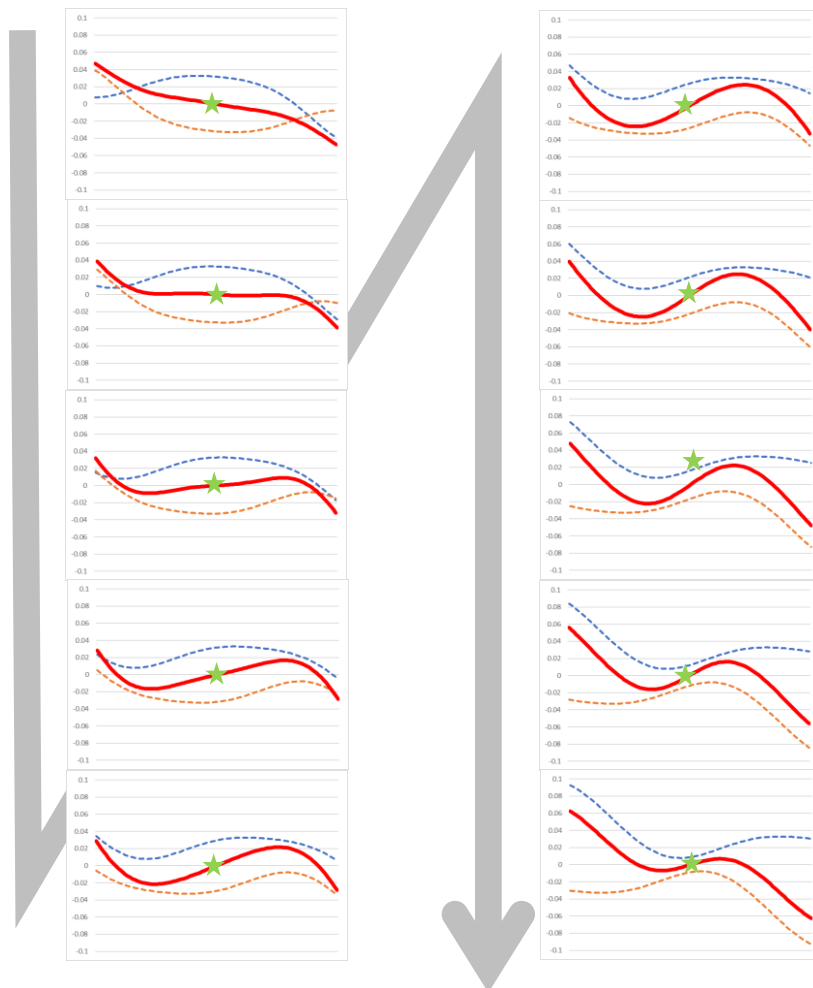
定常波、定常波の「節」

逆方向に進行する2つの波が重なり合って、波がその場所にとどまっているように見える場合、その波動を「定常波」と呼ぶ。

また一次元波動において、正の方向に進行する波の波形と、負の方向に進行する波の波形が、ある特定の位置を中心として互いに点対称な波形である場合。

→その位置における波高は、時刻にかかわらず常にゼロである。

この位置を定常波の「節」と呼ぶ。



数学定理

定常波の節を原点とすると、定常波は奇関数である。

数学的定義

定常波の「波長」

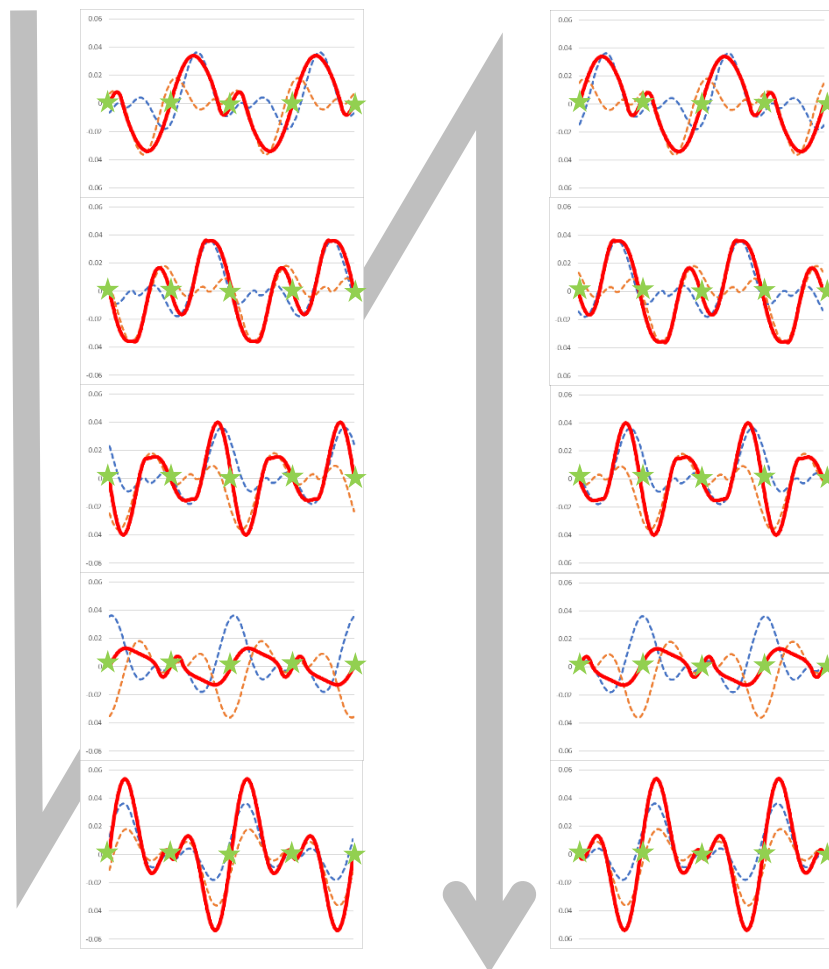
一次元波動において、正の方向に進行する波の波形と、負の方向に進行する波の波形が、ある特定の位置を中心とした点対称であり、

かつ

その波形が波長 $2L$ の周期関数である場合。

→ 間隔 L で、波高が時刻にかかわらず常にゼロである点が発生する。

この間隔 L を定常波の「波長」と呼ぶ。



数学定理

定常波の波長を L とすると、定常波は波長 $2L$ の周期関数である。

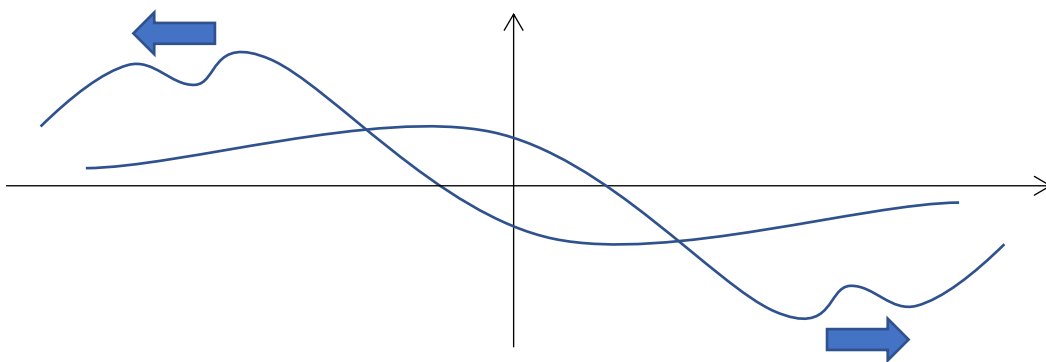
また、定常波は各々の節を中心とした点対称な関数である。

【問題 70】 定常波（原点が節の場合）

(1) 波動方程式のダランベールの解

$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

が、原点において節となるとき、 f と g は原点を中心として互いに点対象な関数であることを示せ。



条件より、

すべての t について $u(0, t) = f(-vt) + g(vt) = 0$ すなわち $f(-vt) = -g(vt)$ が成り立つ。

したがって、 $\xi = vt$ と置くと、

すべての ξ について $f(-\xi) = -g(\xi)$ が成り立つ。

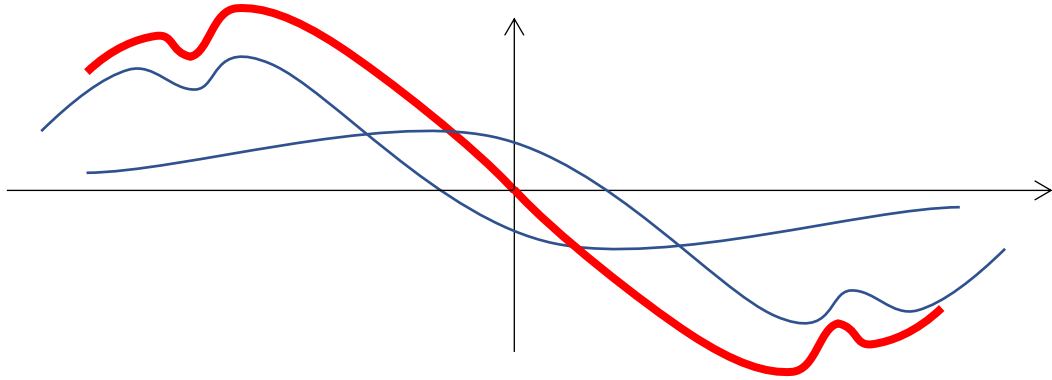
よって、 f と g は原点を中心として互いに点対象な関数である。

(注) つまり、原点を節とする波動は

$$\begin{aligned} u(x, t) &= f(x - vt) - f\{-(x + vt)\} \\ &= f(x - vt) - f(-x - vt) \end{aligned}$$

である。

(2) 波高 $u(x, t)$ が原点において節となる時、任意の時刻 t において、 $u(x, t)$ は x に関して奇関数であることを示せ。



(1) より、

$$u(x, t) = f(x - vt) - f(-x - vt)$$

であるから、

任意の時刻 t において

$$\begin{aligned} u(t, -x) &= f(-x - vt) - f(x - vt) \\ &= -\{f(x - vt) - f(-x - vt)\} \\ &= -u(x, t) \end{aligned}$$

が成り立つ。

したがって、任意の時刻 t において、 $u(x, t)$ は x に関して奇関数である

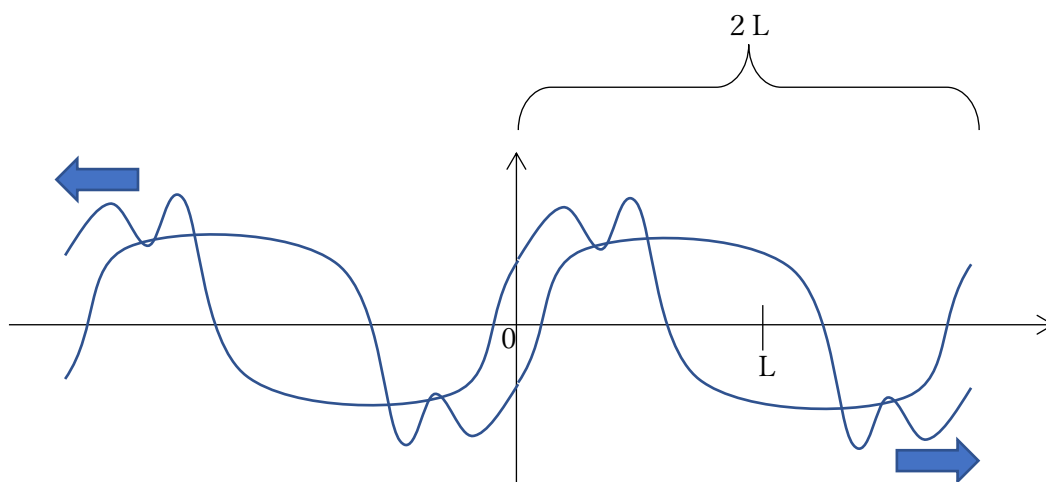
【問題 71】 定常波（2 点が節の場合）

波動が、原点 $x = 0$ と $x = L$ の 2 点において節であるとする。

（したがって、原点 $x = 0$ において節であることから、【問題 70】より $u(x, t) = f(x - vt) - f(-x - vt)$ である。）

このとき、

（1） f は波長 $2L$ の周期関数であることを示せ。



条件より、

すべての t について $u(L, t) = f(L - vt) - f(-L - vt) = 0$ すなわち $f(L - vt) = f(-L - vt)$ が成り立つ。

したがって、 $\xi = L - vt$ と置くと、

すべての ξ について $f(\xi - 2L) = f(\xi)$ が成り立つ。

よって、 f は波長 $2L$ の周期関数である。

（注）このことから、

原点を起点として考えると、 L の偶数倍の点はすべて節であり、

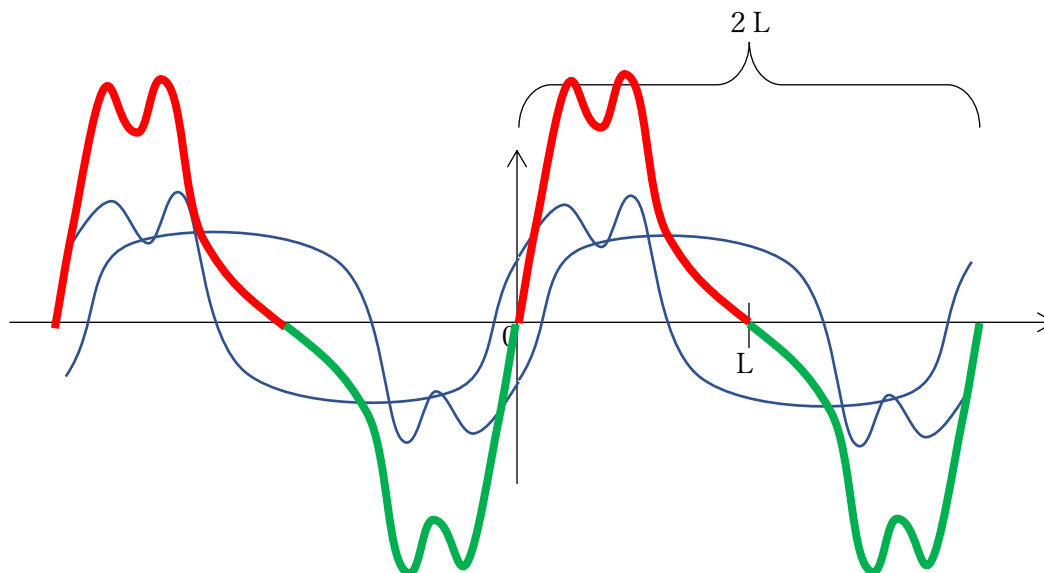
$x = L$ を起点として考えると、 L の奇数倍の点もすべて節である。

したがって、 L の整数倍の点はすべて節である。

よって L を定常波の波長と呼ぶ。

ただし「定常波の波形が、波長 L の周期関数」という意味ではない。「節の間隔が L 」ということである。

(2) 任意の時刻 t において、 $u(x, t)$ は波長 $2L$ の周期関数であることを示せ。
また、 $u(x, t)$ は、各々の節を中心とした点対称な関数であることを示せ。



(1) より、任意の時刻 t において

$$\begin{aligned} u(x - 2L, t) &= f(x - 2L - vt) - f(-x + 2L - vt) \\ &= f\{(x - 2L - vt) + 2L\} - f\{(-x + 2L - vt) - 2L\} \\ &= f(x - vt) - f(-x - vt) \\ &= u(x, t) \end{aligned}$$

が成り立つ。

したがって、任意の時刻 t において、 $u(x, t)$ は波長 $2L$ の周期関数である。

原点が節であることから、【問題 64】より $u(x, t)$ は原点を中心とした奇関数であり、かつ、上記より波長 $2L$ の周期関数である。したがって k を整数として、 $u(x, t)$ は $x = 2kL$ を中心とした点対称な関数である。

また、

$$\begin{aligned} u((2k - 1)L - \xi, t) &= u((2k - 1)L - \xi + 2(-k)L, t) & (\because \textcircled{2}) \\ &= u(-L - \xi, t) \\ &= -u(L + \xi, t) & (\because \textcircled{1}) \\ &= -u(L + \xi + 2(k - 1)L, t) & (\because \textcircled{2}) \\ &= -u((2k - 1)L + \xi, t) \end{aligned}$$

が成り立ち、したがって $u(x, t)$ は $x = (2k - 1)L$ を中心とした点対称な関数である。

以上より、 $u(x, t)$ は、各々の節を中心とした点対称な関数である。

【解説 23】 波の反射

数学的定義

波の反射

媒体にそれ以上進めない境界がある場合、波がその境界で反射することになる。
反射には固定端反射と自由端反射がある。

固定端反射

境界で媒体が固定されており、運動できない場合。

(例) 弦の振動で、端が固定されている場合。

気柱の振動における、閉口端。(注)

自由端反射

境界で媒体が固定されておらず、行き場を失った進行波が逆方向に反転する場合。

(例) 音波や水面の波が、壁で反射する場合。

気柱の振動における、閉口端。(注)

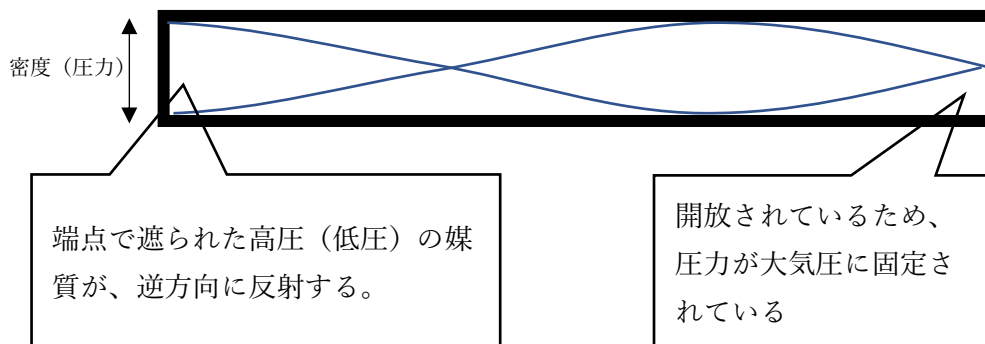
(注) 気柱の振動については、

「媒質の変位」に関して「閉口端が固定端反射、開口端が自由端反射」



と説明されることが多いが、

「密度（圧力）変動」に関して、「閉口端が自由端反射、開口端が固定端反射」と考える方が理解しやすい。



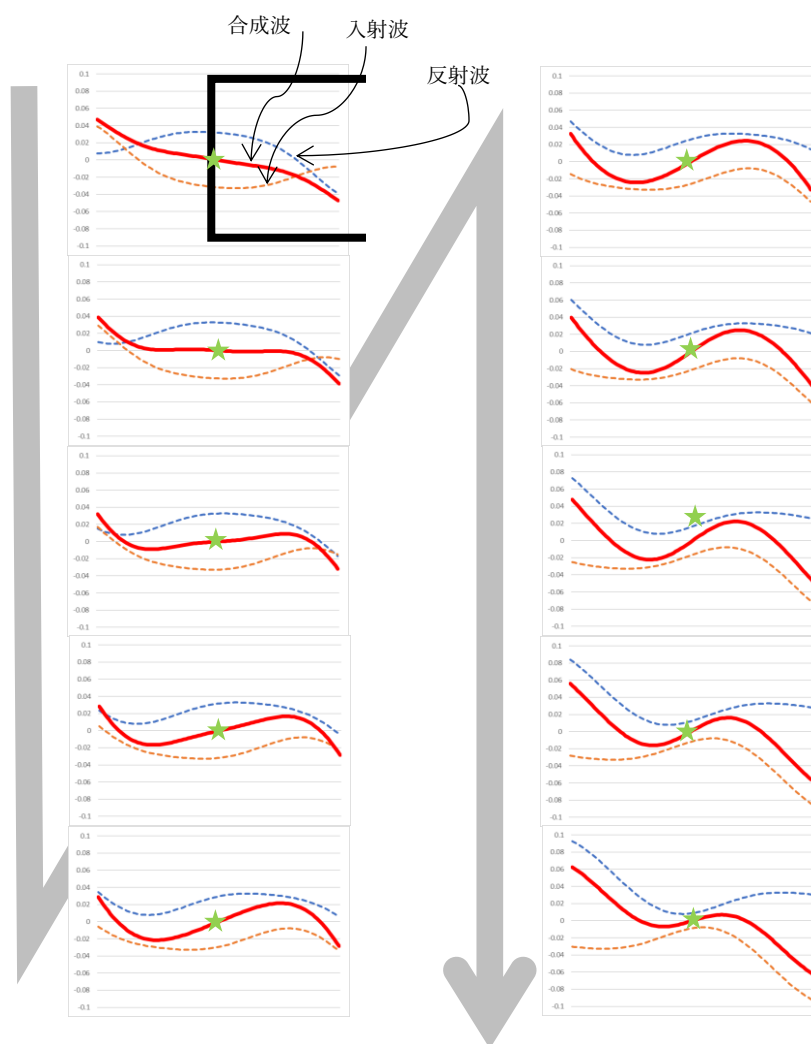
数学定理

固定端反射の波形

端点を中心に、入射波と点対称な反射波が発生する。

つまり、原点が節となる場合と同じ状況である。

このときの合成波（入射波と反射波の重ね合わせ）は、奇関数となる。

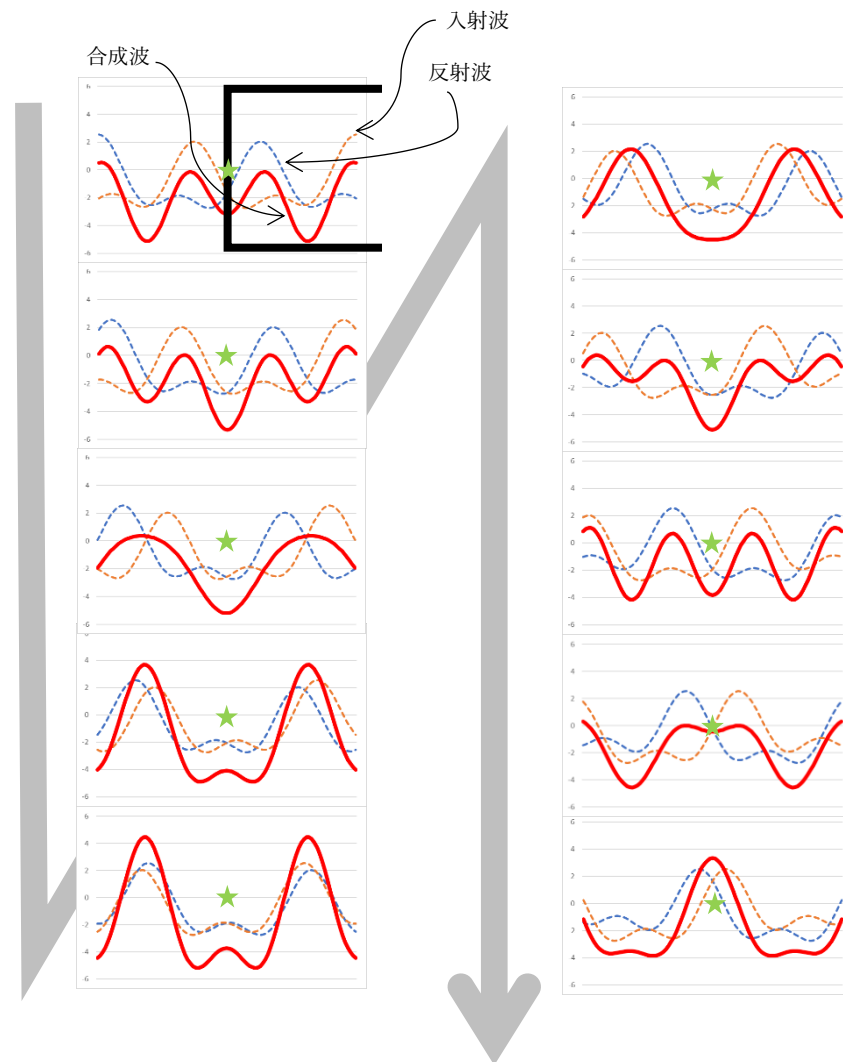


数学定理

自由端反射の波形

端点を境に入射波と線対称な反射波が発生する。

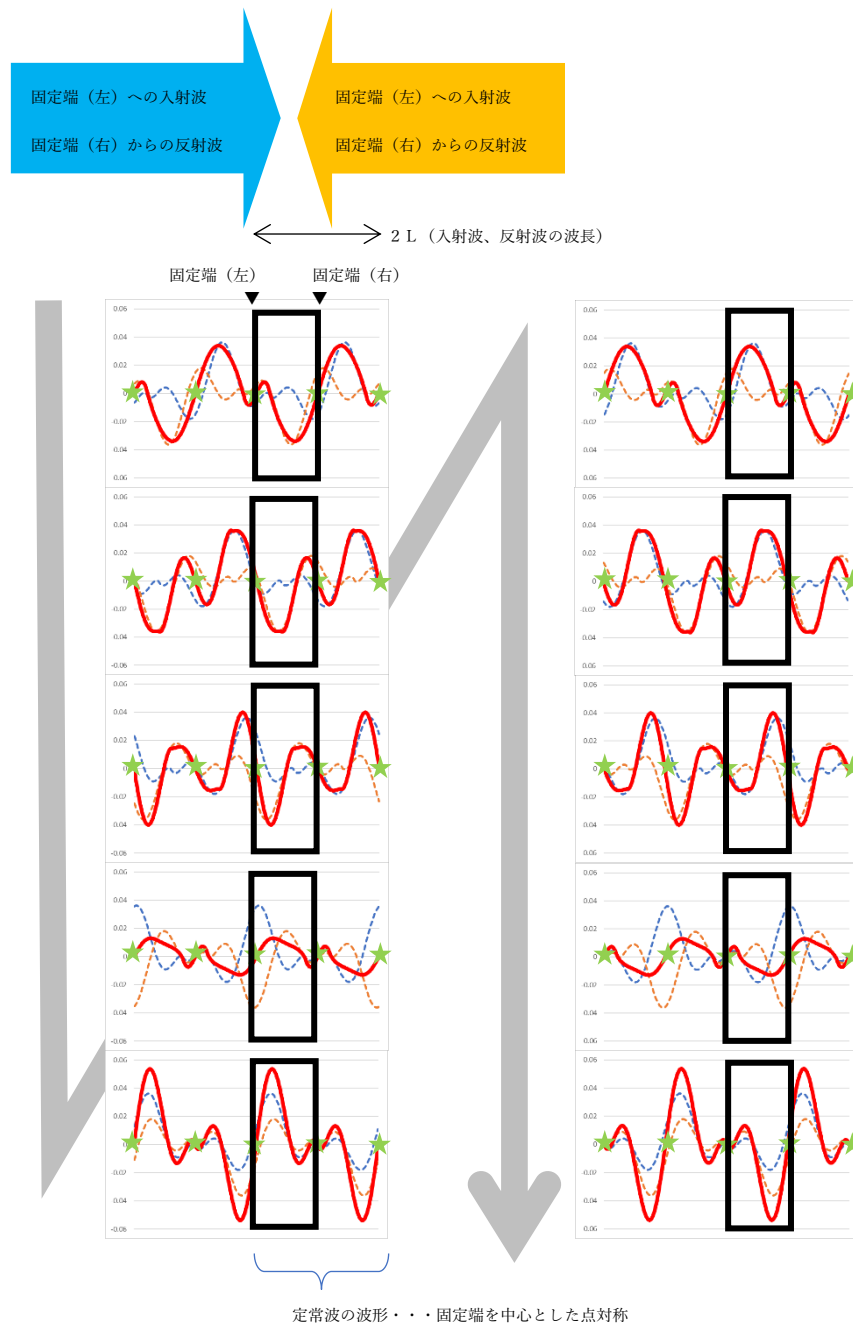
このときの定常波（入射波と反射波の重ね合わせ）は、偶関数となる。



数学定理

固定端・固定端反射の波形

両端点を節とする定常波と同じ。

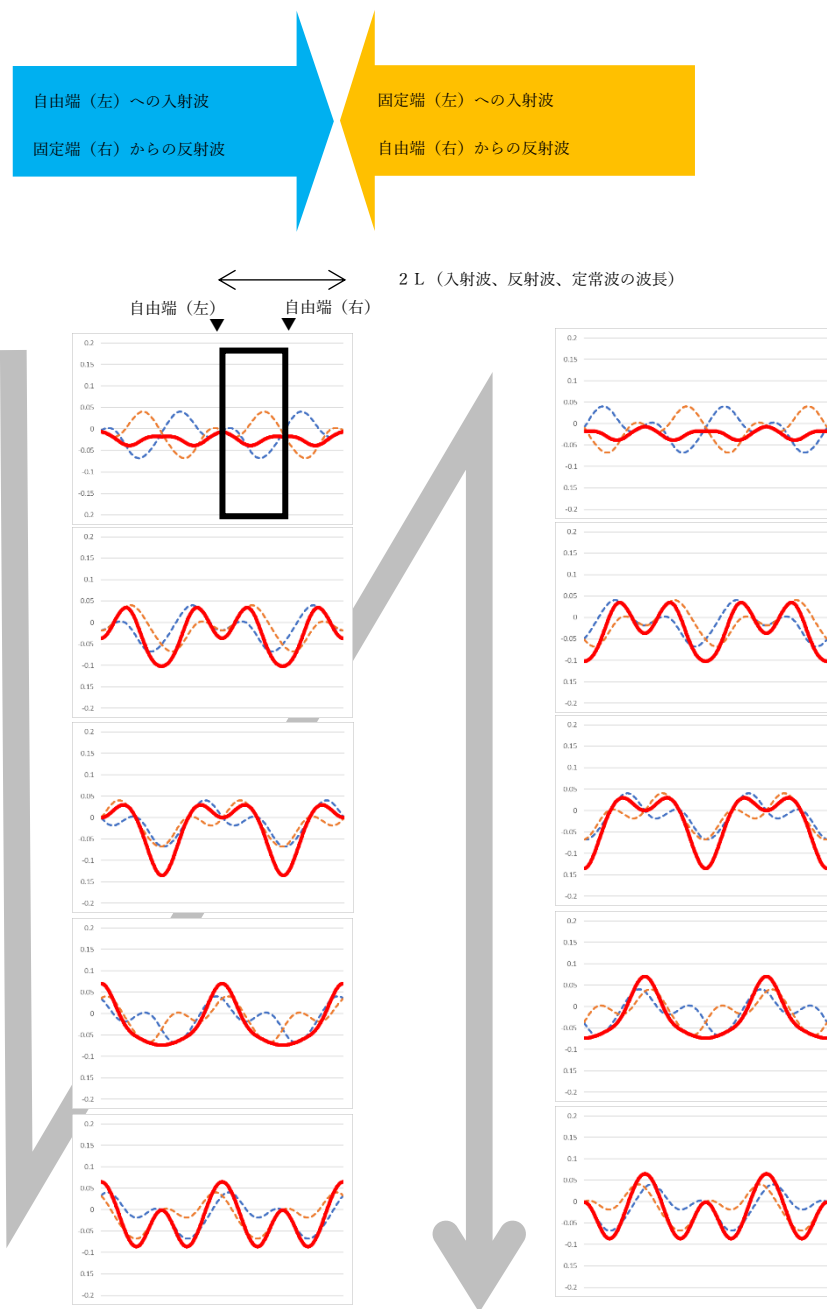


数学定理

自由端・自由端反射の波形

入射波、反射波、定常波、いずれも波長が $2L$ の周期関数である。

このときの定常波（入射波と反射波の重ね合わせ）は、 $x = 0$ および $x = L$ に対して線対称である。



数学定理

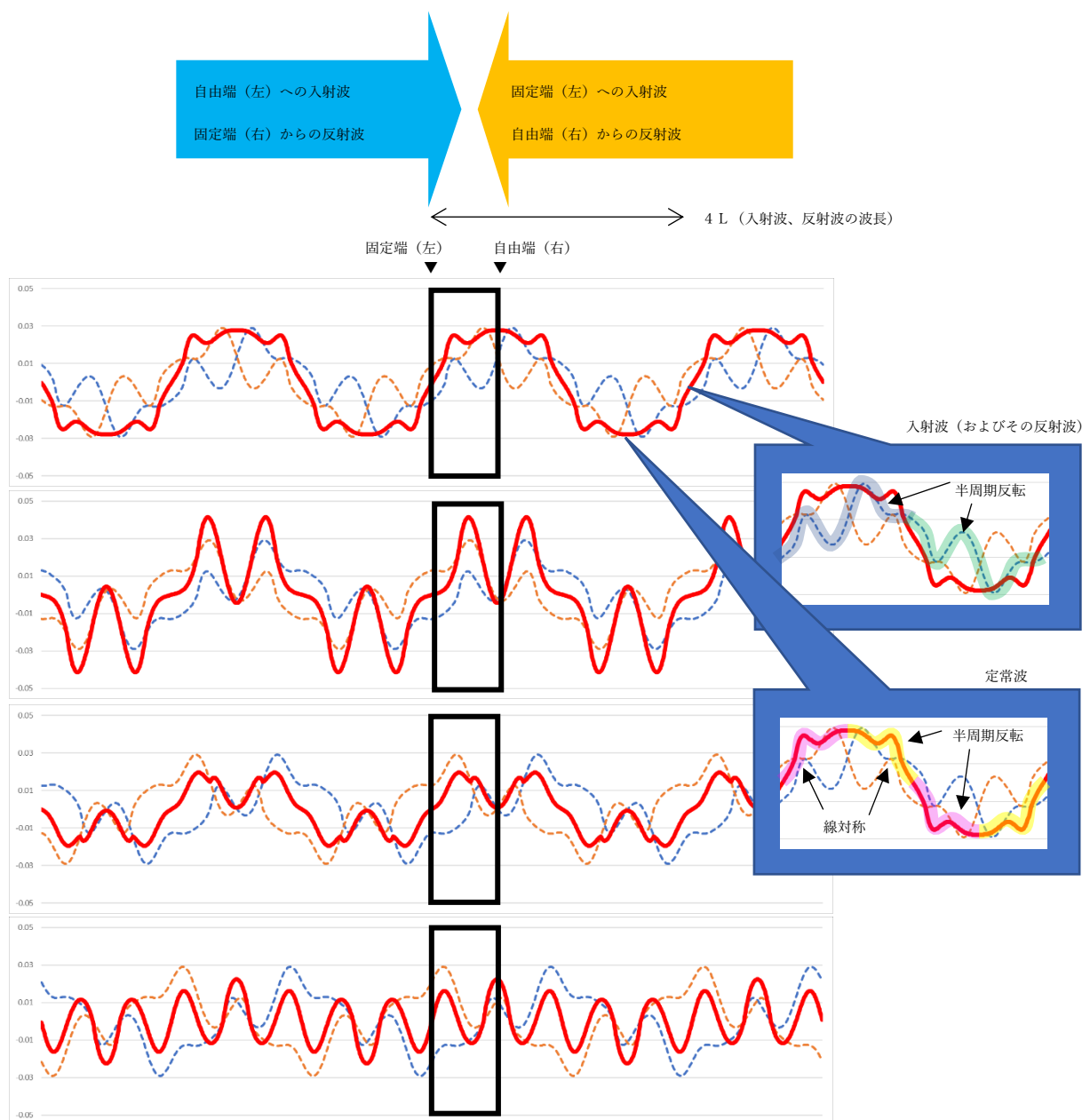
固定端・自由端反射の波形

【入射波（およびその反射波）】

波長が $4L$ 、半周期反転波形（半周期の波形が、残りの半周期の波形と逆符号であるような波形）

【定常波】

波長が $4L$ 、半周期反転波形で、かつ半周期が線対称

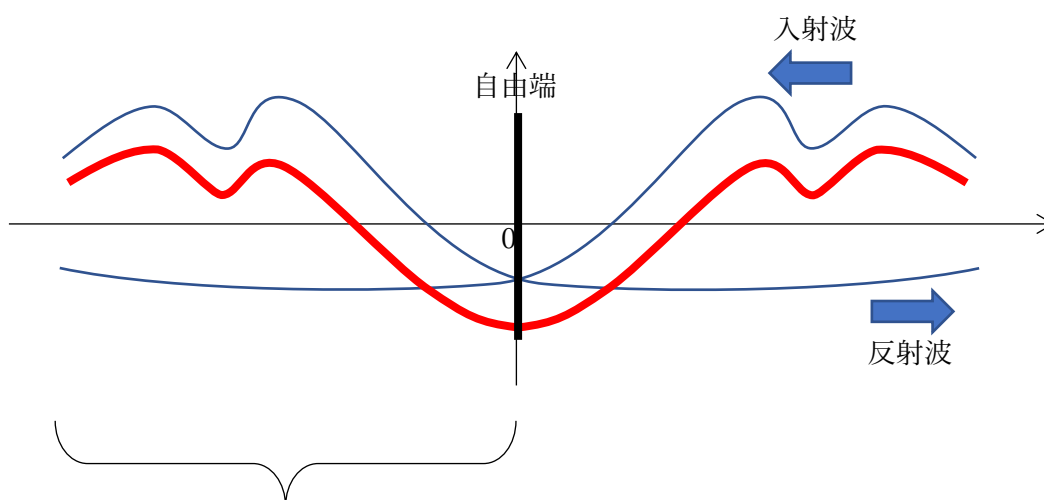


【問題 72】 自由端反射

波動 $u(x, t)$ が、 $x = 0$ において自由端であるとする。

すなわち、ダランベールの解 $u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$ において、 f と g は $x = 0$ に対して線対称（すなわち $f(-x) = g(x)$ ）である。

このとき、 $u(x, t)$ が偶関数であることを示せ。（注）



（注）仮想的に、「端点を通過した後の」入射波と、「端点に突入する前の」反射波を想定する。これにより、仮想的な「端点の裏側の」波形を想定すると、偶関数となる。

ダランベールの解

$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

において、

$$\begin{aligned} u(-x, t) &= f(-x - vt) + g(-x + vt) \\ &= f\{-(x + vt)\} + g\{-(x - vt)\} \end{aligned}$$

であるが、条件より $f(-x) = g(x)$ であることを用いると、

$$\begin{aligned} u(-x, t) &= g(x + vt) + f(x - vt) \\ &= f(x - vt) + g(x + vt) \\ &= u(x, t) \end{aligned}$$

が成り立つ。

したがって、任意の時刻 t において、 $u(x, t)$ は偶関数である。

【問題 73】 自由端・自由端反射

波動 $u(x, t)$ が、 $x = 0$ および $x = L$ において自由端であるとする。

すなわち、ダランベールの解 $u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$ において、 f と g は

$x = 0$ に対して線対称（すなわち $f(-x) = g(x)$ ）

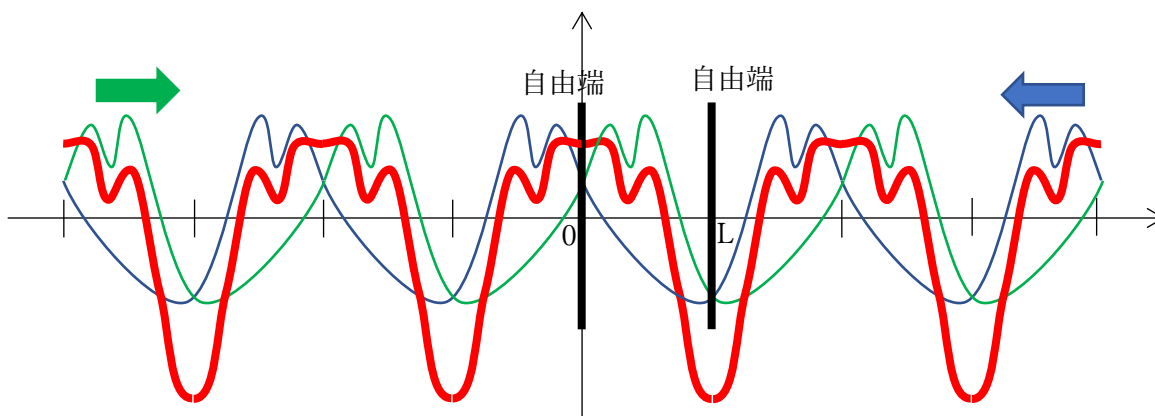
かつ

$x = L$ に対して線対称（すなわち $f(L - x) = g(L + x)$ ）

が成り立つとする。

このとき、

(1) $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $u(x, t)$ は、いずれも (x に関して) 波長 $2L$ の周期関数であることを示せ。



$f(-x) = g(x)$ より、

$$f(x - 2L) = g(-x + 2L)$$

$f(L - x) = g(L + x)$ より

$$g(-x + 2L) = g(L + (-x + L)) = f(L - (-x + L)) = f(x)$$

以上より、 $f(x)$ は波長 $2L$ の周期関数である。

また、 $g(x)$ は $x = 0$ に対して線対称なので、 $g(x)$ も波長 $2L$ の周期関数である。

さらに、 $f(x)$ 、 $g(x)$ ともに波長 $2L$ の周期関数であるので、

$$\begin{aligned} u(x - 2L, t) &= f\{(x - 2L) - vt\} + g\{(x - 2L) + vt\} = f(x - 2L - vt) + g(x - 2L + vt) \\ &= f\{(x + 2L) - 2L - vt\} + g\{(x + 2L) - 2L + vt\} = f(x - vt) + g(x + vt) = u(x, t) \end{aligned}$$

であり、したがって $u(x, t)$ も波長 $2L$ の周期関数である。

(2) $u(x, t)$ は、 $x = 0$ および $x = L$ に対して線対称であることを示せ。

まず【問題 72】より、 $u(x, t)$ は $x = 0$ に対して線対称である。

また、 $u(x, t)$ は $x = L$ において自由端であるから、 $u(x - L, t)$ は $x = 0$ で自由端であり、よって【問題 72】より、 $u(x - L, t)$ は $x = 0$ に対して線対称であるので、

$$u(-x - L, t) = u(x - L, t)$$

が成り立つ。

このとき、(1) より $u(x, t)$ は波長 $2L$ の周期関数なので、

$$u(-x - L, t) = u(x - L, t)$$

$$u(-x - L + 2L, t) = u(x - L + 2L, t)$$

$$u(-x + L, t) = u(x + L, t)$$

よって $u(x, t)$ は $x = L$ に対して線対称である。

【問題 74】 固定端・自由端反射

波動 $u(t, x)$ が、 $x = 0$ において固定端、 $x = L$ において自由端であるとする。

すなわち、ダランベールの解 $u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$ において、 f と g は

$x = 0$ に対して点対称（すなわち $f(-x) = -g(x)$ ）

かつ

$x = L$ に対して線対称（すなわち $f(L - x) = g(L + x)$ ）

が成り立つとする。

このとき、

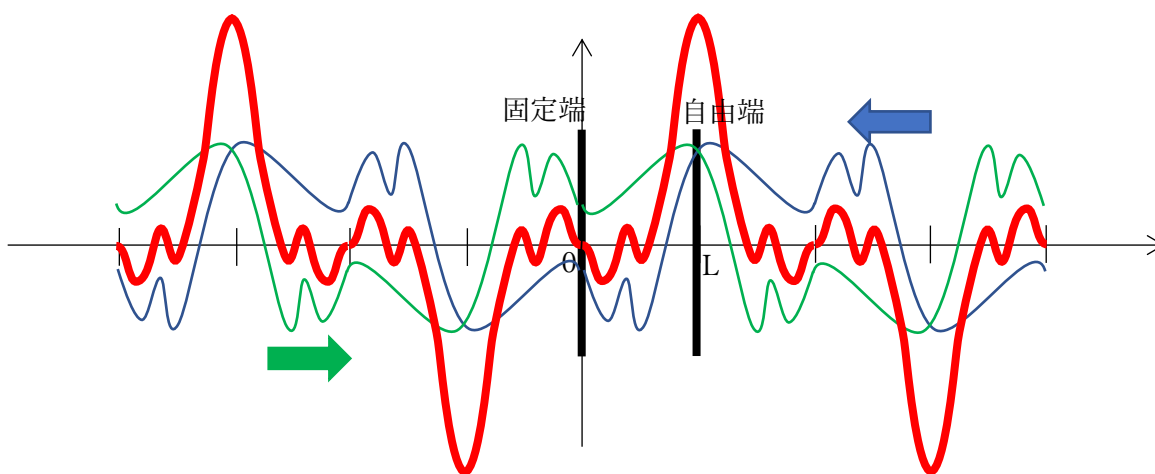
(1) $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $u(x, t)$ は、いずれも半周期反転波形（半周期の波形が、残りの半周期の波形と逆符号であるような波形）であることを示せ。すなわち、

$$f(x - 2L) = -f(x)$$

$$g(x - 2L) = -g(x)$$

$$u(t, x - 2L) = -u(t, x)$$

が成り立つことを示せ。



条件より

$$f(-x) = -g(x) \cdots \star_1,$$

$$f(L-x) = g(L+x) \cdots \star_2$$

であるので、

$$f(x-2L) = -g(-x+2L) \quad (\because \star_1)$$

$$= -g\{L-(x-L)\}$$

$$= -f\{L+(x-L)\} \quad (\because \star_2)$$

$$= -f(x)$$

が成り立つ。

また、 $f(x-2L) = -f(x)$ より、 $f(x)$ と $g(x)$ は $x=0$ に対して点対称なので、

$$-g(-x+2L) = g(-x)$$

$$= -f\{(-x)-(-2L)\}$$

$$= -f(-x) \quad (\because \star_3)$$

$$= -(-g(x)) \quad (\because \star_1)$$

$$= g(x) \cdots \star_4$$

が成り立つ。

さらに、 $f(x-2L) = -f(x)$ 、 $g(x-2L) = -g(x)$ より、

$$u(x-2L, t) = f\{(x-2L)-vt\} + g\{(x-2L)+vt\}$$

$$= f\{(x-vt)-2L\} + g\{(x+vt)-2L\}$$

$$= -f(x-vt) - g(x+vt)$$

$$= -u(x, t)$$

が成り立つ。

(2) $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $u(t, x)$ は、いずれも (x に関して) 波長 $4L$ の周期関数であることを示せ。

(1) より

$$f(x - 4L) = f\{(x - 2L) - 2L\} = -f(x - 2L) = -(-f(x)) = f(x)$$

$$g(x - 4L) = g\{(x - 2L) - 2L\} = -g(x - 2L) = -(-g(x)) = g(x)$$

$$u(x - 4L, t) = u\{(x - 2L) - 2L, t\} = -u(x - 2L, t) = -(-u(x, t)) = u(x, t)$$

が成り立つ。

したがって、 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $u(x, t)$ は、いずれも (x に関して) 波長 $4L$ の周期関数である

【問題 75】 正弦波の場合の、定常波および反射

(1) 定常波、固定端・固定端反射、自由端・自由端反射の場合

【問題 71】より、 $u(x, t)$ が原点 $x = 0$ と $x = L$ の2点を節とする定常波であるならば、 $f(x)$ は波長 $2L$ の周期関数である。(注)

このことを用いて、原点 $x = 0$ と $x = L$ の2点を節とする定常波

$$u(x, t) = f(x - vt) - f(-x - vt)$$

において、もし $f(x)$ が正弦波であるならば、 $f(x)$ の波長は $\frac{2L}{n}$ (n は自然数)であることを示せ。

(注) 原点 $x = 0$ と $x = L$ の2点を端点とする、固定端・固定端反射および自由端・自由端反射においても、同様に $f(x)$ は波長 $2L$ の周期関数であり、もし $f(x)$ が正弦波であるならば、 $f(x)$ の波長は $\frac{2}{n}L$ (n は自然数)であることとなる。

f が正弦波であるので、 $f(x) = A \sin(\omega x + \theta)$ とおく。

$f(x)$ は波長 $2L$ の周期関数であるので、 $f(x - 2L) = f(x)$ より

$$A \sin\{\omega(x - 2L) + \theta\} = A \sin(\omega x + \theta)$$

$$\sin\{\omega(x - 2L) + \theta\} - \sin(\omega x + \theta) = 0$$

$$2 \cos \frac{\{\omega(x-2L)+\theta\} + \{\omega x + \theta\}}{2} \sin \frac{\{\omega(x-2L)+\theta\} - \{\omega x + \theta\}}{2} = 0$$

$$\cos(\omega x - \omega L + \theta) \sin(-\omega L) = 0$$

これがすべての x について成立するので、

$$\sin(-\omega L) = 0$$

よって $\omega L = n\pi$ より

$$\omega = \frac{n\pi}{L}$$

したがって、

$$f(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L}x + \theta\right)$$

であり、 $f(x)$ の波長は

$$2\pi \div \frac{n\pi}{L} = \frac{2}{n}L$$

である。

(2) 固定端・自由端反射の場合

【問題 74】より、 $u(x, t)$ が $x = 0$ において固定端、 $x = L$ において自由端であるならば、 $f(x)$ は波長 $4L$ の半周期反転波形である。

このことを用いて、 $x = 0$ を固定端、 $x = L$ を自由端とする定常波

$$u(t, x) = f(x - vt) - f(-x - vt)$$

において、もし $f(x)$ が正弦波であるならば、 $f(x)$ の波長は $\frac{4}{(2n-1)}L$ (n は自然数) であることを示せ。

f が正弦波であるので、 $f(x) = A \sin(\omega x + \theta)$ とおく。

$f(x)$ は波長 $4L$ の半周期反転波形であるので、 $f(x - 2L) = -f(x)$ より

$$A \sin\{\omega(x - 2L) + \theta\} = -A \sin(\omega x + \theta)$$

$$\sin\{\omega(x - 2L) + \theta\} + \sin(\omega x + \theta) = 0$$

$$2 \sin \frac{\{\omega(x-2L)+\theta\}+\{\omega x+\theta\}}{2} \cos \frac{\{\omega(x-2L)+\theta\}-\{\omega x+\theta\}}{2} = 0$$

$$\sin(\omega x - 2\omega L + \theta) \cos(-2\omega L) = 0$$

これがすべての x について成立するので、

$$\cos(-2\omega L) = 0$$

よって $2\omega L = (2n - 1)\pi$ より

$$\omega = \frac{(2n-1)\pi}{2L}$$

したがって、

$$f(x) = A \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x + \theta\right)$$

であり、 $f(x)$ の波長は

$$2\pi \div \frac{(2n-1)\pi}{2L} = \frac{4}{(2n-1)}L$$

である。

